

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - SETOR DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA - PPGMNE

PAULO DE OLIVEIRA WEINHARDT

**ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2016

PAULO DE OLIVEIRA WEINHARDT

**ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia, como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia”, área de concentração em Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone
Machado

Coorientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

CURITIBA

2016

W423e

Weinhardt, Paulo de Oliveira

Estudo da estabilidade do método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise dinâmica/ Paulo de Oliveira Weinhardt. – Curitiba, 2016. 145 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2016.

Orientador: Roberto Dalledone Machado – Co-orientador: Marcos Arndt. Bibliografia: p. 134-141.

1. Método dos elementos finitos. 2. Mecânica dos sólidos - Estruturas. 3. Análise numérica. 4. Algoritmos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Machado, Roberto Dalledone. III. Arndt, Marcos. IV. Título.

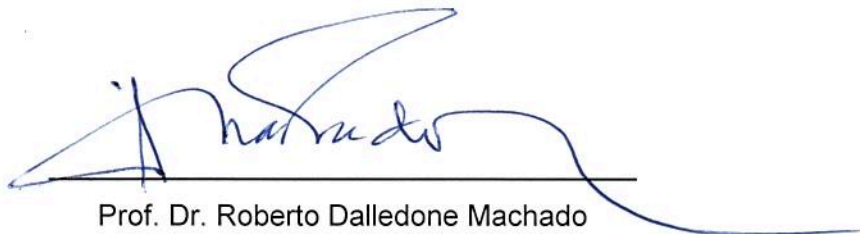
CDD: 620.00151825

TERMO DE APROVAÇÃO

PAULO DE OLIVEIRA WEINHARDT

ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



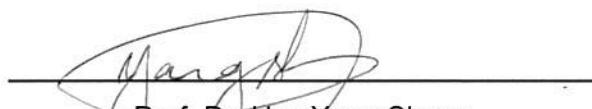
Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado
Orientador - Membro do PPGMNE/UFPR.



Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
Membro da UFMG



Prof. Dr. Marco Antônio Luersen
Membro da UTFPR



Prof. Dr. Hsu Yang Shang
Membro da PUCPR

Curitiba, 17 de fevereiro de 2016

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais que me ensinaram o valor da educação e do estudo.
- A minha namorada, pelo companheirismo incondicional e por todo o carinho, mesmo nas fases mais turbulentas.
- Ao meu orientador, Roberto Dalledone Machado, que nunca negou cinco minutinhos de conversa em sua sala, por mais ocupado que estivesse.
- Ao meu coorientador, Marcos Arndt, que mostrou paciência inesgotável.
- Aos amigos de sala pelas conversas inspiradoras e companhia indispensável.
- A todos os amigos que tiveram alguma participação de forma direta ou indireta na elaboração deste trabalho.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo incentivo financeiro.

“Daher ist die Aufgabe nicht sowohl zu sehen, was noch keiner gesehen hat, als bei dem, was jeder sieht, zu denken, was noch keiner gedacht hat.”

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer, filósofo alemão do século XIX

RESUMO

No contexto da análise dinâmica de estruturas, uma das limitações do Método dos Elementos Finitos (MEF) é a dificuldade de aproximar as altas frequências. Essa falta de precisão se torna mais significativa a medida que os carregamentos excitam os modos com frequências mais altas. Visando abordar esse tipo de problema é possível utilizar o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendido (MEFG/MEFE) para enriquecer o espaço de aproximação e representar melhor esses modos de alta frequência. Apesar das excelentes propriedades do MEFG/MEFE como alta acurácia, versatilidade de aplicação e excelentes taxas de convergência, há aspectos que ainda limitam sua aplicabilidade como a instabilidade numérica associada ao processo de enriquecimento presente mesmo em problemas de valor de contorno bem postos. As matrizes do MEFG/MEFE podem ser consideravelmente mal-condicionadas, podendo resultar em uma perda de acurácia da aproximação, e até mesmo resultando em matrizes numericamente singulares. Assim, neste trabalho apresentam-se duas propostas para contornar o problema de sensibilidade do MEFG: uma adaptação do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado voltada à Análise Dinâmica e uma estratégia de pré-condicionamento das funções de enriquecimento. Diversos exemplos unidimensionais de análise modal e transiente são apresentados e seus resultados são discutidos, mostrando que as implementações propostas possibilitam captar melhor frequências mais elevadas, melhorando a representatividade do espectro. Observando o ganho de estabilidade numérica proporcionado pela adoção da estratégia de pré-condicionamento das funções de enriquecimento, estendeu-se sua proposta à análise modal bidimensional, onde a instabilidade numérica do refino p pode ser então contornada, implicando em consequente ganho de acurácia no espectro de frequência.

Palavras-chave: MEFG. Análise Dinâmica. Estabilidade Numérica. MEFG Estabilizado.

ABSTRACT

In the context of dynamic analysis of structures, one of the limitations of the Finite Element Method (FEM) is the difficulty of approaching the high frequencies. This lack of precision becomes more significant as the loading excite modes with higher frequencies. Aiming at address this problem one may use the Finite Element Method Generalized / Extended (GFEM / XFEM) to enrich the approximation space and better represent these high frequency modes. Despite the excellent properties of GFEM / XFEM as high accuracy, application versatility and excellent convergence rates, there are aspects that still limit its applicability as the numerical instability associated with this enrichment process even in well-placed boundary value problems. GFEM/XFEM matrices may be ill-conditioned, which may result in a accuracy loss, and even resulting in numerically singular matrices. In this work two proposals are presented to circumvent the GFEM sensitivity problem: an adaptation of the Stabilized Generalized Finite Element Method applied to Dynamic Analysis and a pre-conditioning of enrichment functions. Several examples of one-dimensional modal and transient analysis are presented and results are discussed, showing that the proposed implementations allow to better capture higher frequencies, improving representation of the spectrum. Considering the numerical stability provided by the adoption of preconditioning of enrichment functions strategy, its proposal was extended to the two-dimensional modal analysis enabling to bypass numerical instability of p refinement, resulting in accuracy gain in the frequency spectrum.

Keywords: GFEM. Dynamic Analysis. Numerical Stability. Stabilized GFEM

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Barra reta de comprimento l e seção transversal A .	39
FIGURA 2	– Diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal.	40
FIGURA 3	– Polinômios de Lagrange - (a): $k = 1$; (b): $k = 2$; (c): $k = 3$.	65
FIGURA 4	– Funções Peso C^k , $h_\alpha = 2$ - (a): $n = 1$; (b): $n = 2$; (c): $n = 3$; (d): $n = 4$.	66
FIGURA 5	– Partição da Unidade C^k - (a): $n = 1$; (b): $n = 2$; (c): $n = 3$; (d): $n = 4$.	67
FIGURA 6	– Partição da Unidade Trigonométrica.	68
FIGURA 7	– Base de funções de aproximação enriquecida - $j = 1$, $L_e = 1$ e $\beta = \frac{3\pi}{2}$.	70
FIGURA 8	– Base de funções de aproximação enriquecida - $j = 1$ e $\beta = 2\pi$.	71
FIGURA 9	– Base de funções de aproximação enriquecida bidimensional - $j = 1$ e $\beta = \pi$.	73
FIGURA 10	– Processo de estabilização das funções do primeiro nível de enriquecimento.	75
FIGURA 11	– Barra bi-engastada.	78
FIGURA 12	– Espectro de Frequências - MEF com Partição da Unidade Lagrangeana.	80
FIGURA 13	– Espectro de Frequências - MEF com Partição da Unidade baseada em funções de Shepard com $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.	81
FIGURA 14	– Espectro de Frequências - MEF com Partição da Unidade baseada na Relação Trigonométrica Fundamental.	83
FIGURA 15	– Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com $\beta = \frac{3\pi}{4}$.	84
FIGURA 16	– Primeira metade do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com $\beta = \frac{3\pi}{4}$.	85
FIGURA 17	– Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com $\beta = \frac{7\pi}{8}$.	86
FIGURA 18	– Primeira metade do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com $\beta = \frac{7\pi}{8}$.	87
FIGURA 19	– Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com $\beta = \pi$.	88
FIGURA 20	– Primeira metade do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com $\beta = \pi$.	88
FIGURA 21	– Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 2 níveis de enriquecimento.	89
FIGURA 22	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 2 níveis de enriquecimento.	90
FIGURA 23	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 2 níveis de enriquecimento (Análise local).	90
FIGURA 24	– Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 3 níveis de enriquecimento.	91
FIGURA 25	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 3 níveis de enriquecimento.	92
FIGURA 26	– Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 4 níveis de enriquecimento.	93
FIGURA 27	– Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 4 níveis de enriquecimento (Detalhe local).	94

FIGURA 28	– Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 1 nível de enriquecimento.	95
FIGURA 29	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 1 nível de enriquecimento.	96
FIGURA 30	– Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 2 níveis de enriquecimento.	97
FIGURA 31	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 2 níveis de enriquecimento.	98
FIGURA 32	– Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 3 níveis de enriquecimento.	99
FIGURA 33	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 3 níveis de enriquecimento.	100
FIGURA 34	– Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 4 níveis de enriquecimento.	101
FIGURA 35	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 4 níveis de enriquecimento.	101
FIGURA 36	– Números de condição das matrizes elementares do MEFG - 10 primeiros níveis de enriquecimento.	103
FIGURA 37	– Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 2 níveis de enriquecimento.	104
FIGURA 38	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 2 níveis de enriquecimento.	104
FIGURA 39	– Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 3 níveis de enriquecimento.	105
FIGURA 40	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 3 níveis de enriquecimento.	106
FIGURA 41	– Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 4 níveis de enriquecimento.	107
FIGURA 42	– Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 4 níveis de enriquecimento.	107
FIGURA 43	– Números de condição das matrizes elementares do MEFG - 10 primeiros níveis de enriquecimento.	108
FIGURA 44	– Espectro de Frequências - Modificação Heurística - 5, 10, 25 e 50 níveis de enriquecimento.	109
FIGURA 45	– Espectro de Frequências - Modificação Heurística - 5, 10, 25 e 50 níveis de enriquecimento (Erros abaixo de 1%).	110
FIGURA 46	– Barra engastada-livre sujeita a força dependente do tempo na extremidade.	111
FIGURA 47	– Análise transiente - (a) Força de Heaviside, (b) Força de impulso, (c) Descarregamento Exponencial.	112
FIGURA 48	– Análise transiente - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	113
FIGURA 49	– Análise transiente (refino p) - (a) Acelerações na extremidade livre (apenas MEF), (b) Acelerações na extremidade livre (MEF, MEFGE e Modificação Heurística).	114
FIGURA 50	– Análise transiente (refino p) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	115
FIGURA 51	– Análise transiente (refino p) - (a) Acelerações na extremidade livre (MEFG, MEFGE e Modificação Heurística), (b) Acelerações na extremidade livre (MEFG e Modificação Heurística).	116

FIGURA 52	– Análise transiente (refino p de alta ordem) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	117
FIGURA 53	– Análise transiente (refino p) - Acelerações na extremidade livre.	118
FIGURA 54	– Análise transiente - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	120
FIGURA 55	– Análise transiente (refino p) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	121
FIGURA 56	– Análise transiente (refino p de alta ordem) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	122
FIGURA 57	– Descarregamento exponencial	123
FIGURA 58	– Análise transiente - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	124
FIGURA 59	– Análise transiente (refino p) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	125
FIGURA 60	– Análise transiente (refino p de alta ordem) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.	126
FIGURA 61	– Espectro de Frequências - Modificação Heurística - 1, 2 e 3 níveis de enriquecimento.	129
FIGURA 62	– Convergência do refino p para as três primeiras frequências distintas - MEFG - Modificação Heurística Bidimensional.	129
FIGURA 63	– Membrana com contorno arbitrário.	142
FIGURA 64	– Diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal.	143
FIGURA 65	– Inclinações do elemento infinitesimal.	143

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFG x MEFGE - 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO	96
TABELA 2	– NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFG x MEFGE - 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	98
TABELA 3	– NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFG x MEFGE - 3 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	100
TABELA 4	– NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFG x MEFGE - 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	102
TABELA 5	– VALORES DE FREQUÊNCIA NO REFINO p REFERENTES ÀS TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DISTINTAS - MEFG - MODIFICAÇÃO HEURÍSTICA BIDIMENSIONAL	130

LISTA DE SIGLAS

- CFL - Courant-Friedrichs-Lewy
- HHT - Hilbert-Hughes-Taylor
- FETI - *Finite Element Tearing and Interconnecting*;
- MC - Método Composto;
- ME - Método Espectral;
- MEF - Método dos Elementos Finitos;
- MEFE - Método dos Elementos Finitos Estendido;
- MEFG - Método dos Elementos Finitos Generalizados;
- MEFG-gl - Método dos Elementos Finitos Generalizados Global Local
- MEFGA - Método dos Elementos Finitos Generalizado Adaptativo;
- MEFGE - Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado;
- MEFGO - Método dos Elementos Finitos Generalizados Ortonormalizado;
- MEFF - Método dos Elementos Finitos p -Fourier;
- MEFPU - Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade;
- MGC - Método do Gradiente Conjugado;
- MMC - Método dos Modos Componentes;
- MMA - Método dos Modos Admissíveis;
- MPU - Método da Partição da Unidade;
- MSM - Método Sem Malha.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $B(\bullet, \bullet)$ - Forma bilinear;
- $\dim S$ - Dimensão do espaço vetorial S ;
- E - Módulo de elasticidade do material;
- F - Vetor de Forças;
- h - Espessura da membrana;
- H^s - Espaço de Hilbert de ordem s ;
- $I_\omega(\varphi_i(x))$ - Interpolante linear por parte da i -ésima função enriquecedora subordinada ao suporte ω ;
- \inf - Infimum;
- K - Matriz de Rigidez;
- L^p - Espaço de Lebesgue de ordem p ;
- $\mathbf{L}_i^k(\xi)$ - i -ésimo Polinômio de Lagrange que interpola $k + 1$ pontos na variável ξ ;
- M - Matriz de Massa;
- \bar{n} - Ordem do n -ésimo autovalor normalizado;
- $R(\bullet)$ - Quociente de Rayleigh;
- $S_i(\xi)$ - i -ésima função de Shepard na variável ξ ;
- $\text{supp}(\phi_i)$ - Suporte de ϕ_i ;
- T - Operador compacto;
- T_x - Componente de esforço normal na direção x ;
- T_y - Componente de esforço normal na direção y ;

- T_{xy} - Componente de esforço cisalhante na direção do produto escalar $x \times y$;
- T_{yx} - Componente de esforço cisalhante na direção do produto escalar $y \times x$;
- $T_i(\xi)$ - i -ésima função de Partição da Unidade Trigonométrica na variável ξ ;
- u_h - Função que aproxima u pelo MEFPU;
- u_h^e - Função que aproxima u pelo MEFPU no elemento;
- u_{MEF} - Parcela de aproximação proveniente do espaço não enriquecido do MEF;
- u_{ENR} - Parcela de aproximação proveniente do enriquecimento;
- \bar{u} - Aproximação de u ;
- V_i - Espaço de aproximação local;
- v_i - i -ésima função da base de aproximação;
- $W^{s,p}$ - Espaço de Sobolev de ordem p que engloba derivadas até ordem s ;
- $W_i(\xi)$ - i -ésima função peso de Polinômios Racionais na variável ξ ;
- β_j - j -ésimo - parâmetro de enriquecimento;
- $\bar{\beta}_j$ - j -ésimo - parâmetro de enriquecimento modificado para estabilização;
- Γ - Contorno;
- $\Delta(\bullet)$ - Operador Laplaciano;
- λ - Autovalor;
- λ_n - n -ésimo autovalor;
- $\bar{\lambda}$ - Aproximação de λ ;
- ρ - Massa específica linear do material;
- σ_x - Tensão axial na barra;
- σ_n - Tensão normal no contorno da membrana;
- τ_{xy} - Tensão de cisalhamento no plano xy tangente ao contorno da membrana;
- ϕ_i - Funções de forma;

- Φ - Autovetor;
- $\tilde{\varphi}_i$ - i -ésima função enriquecedora estabilizada;
- φ_i - i -ésima função enriquecedora;
- ω - Frequência analítica;
- ω_h - Frequência aproximada, dada pela raiz do autovalor;
- $\bar{\omega}$ - Frequência normalizada;
- Ω - Domínio;
- Ω_i - i -ésimo Domínio local;
- $\|\bullet\|_H$ - Norma no espaço H ;
- $\square(\bullet)$ - Operador d'Alembertiano;
- $\nabla(\bullet)$ - Operador Gradiente.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	OBJETIVOS	18
1.1.1	Objetivo Geral	18
1.1.2	Objetivos Específicos	19
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
1.3	METODOLOGIA ADOTADA	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS/ESTENDIDOS	21
2.2	MÉTODOS ENRIQUECIDOS APLICADOS À DINÂMICA DE ESTRUTURAS	24
2.3	ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO MEFG/MEFE	30
3	REFERENCIAL TEÓRICO	38
3.1	CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	38
3.1.1	1D - Barra Reta	39
3.2	TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL	41
3.2.1	Espaços de Funções	41
3.2.2	Propriedades de Espaços de Funções	42
3.2.3	Teoria Espectral e Operadores Compactos	43
3.2.4	Ferramentas de Aproximação	46
3.3	BASE MATEMÁTICA DA TEORIA DE APROXIMAÇÃO	48
3.3.1	Análise no Domínio do Tempo	48
3.3.1.1	Existência e Unicidade de Solução da Forma Fraca	50
3.3.1.2	Regularidade da Solução da Forma Fraca	51
3.3.1.3	Solução Aproximada da Análise Transiente	51
3.3.2	Análise no Domínio da Frequência	52
3.3.2.1	Decomposição Espectral	53
3.3.2.2	Solução Aproximada do Problema Espectral	54
3.3.2.3	Aplicação da Teoria de Rayleigh	55
3.3.2.4	Análise de Erro	57
4	FUNDAMENTOS DO MEFG EM ANÁLISE DINÂMICA	61
4.1	CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO	61
4.2	PARTIÇÃO DA UNIDADE	62
4.2.1	PU definida a partir de Polinômios de Lagrange	63
4.2.2	PU definida a partir de Polinômios Racionais	65
4.2.3	PU definida a partir de Funções Trigonométricas	67
4.3	ENRIQUECIMENTO TRIGONOMÉTRICO	68
4.4	EXTENSÃO PARA FUNÇÕES DE FORMA BIDIMENSIONAIS	72
5	ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO MEFG	74
5.1	MODIFICAÇÃO BASEADA NO MEFGE	74
5.2	MODIFICAÇÃO HEURÍSTICA DAS FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO	75
6	RESULTADOS	77
6.1	ANÁLISE UNIDIMENSIONAL	77

6.1.1	Análise Modal	78
6.1.1.1	MEF com variações na PU	78
6.1.1.2	MEFG Trigonométrico	84
6.1.1.3	MEFG Estabilizado aplicado à dinâmica	95
6.1.1.4	Modificação Heurística do Enriquecimento	103
6.1.2	Análise Transiente	110
6.2	ANÁLISE BIDIMENSIONAL	127
6.2.1	Análise Modal	128
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	131
	REFERÊNCIAS	134
	Apêndice A – 2D - MEMBRANA	142

1 INTRODUÇÃO

Análise dinâmica é uma subárea da mecânica dos sólidos que consiste no estudo das relações entre as ações aplicadas sobre uma estrutura e sua resposta ao longo do tempo.

O estudo das vibrações em estruturas pode ser separado em duas classes: vibração livre e vibração forçada. A vibração livre ocorre quando o movimento do sistema considerado sofre efeitos inerentes apenas de si mesmo, na ausência de forças externas. O estudo da vibração livre permite identificar os modos principais de vibração e suas correlacionadas frequências naturais que caracterizam dinamicamente o sistema. A vibração forçada, por sua vez, ocorre quando o sistema considerado está sob a ação de excitações externas. Quando a excitação externa coincide com um dos modos naturais ocorre o fenômeno de ressonância, que causa um aumento exagerado da amplitude de oscilação podendo ocasionar danos. Dessa forma, o estudo das frequências naturais é de especial interesse na análise dinâmica de estruturas.

No contexto do projeto e análise de estruturas, frequentemente não é possível testar todas as hipóteses e modelos na prática, seja por limitações de custo ou pelas dificuldades de reproduzir condições de operação. Dessa forma, a modelagem computacional consiste numa ferramenta relevante em projeto, possibilitando a obtenção de resultados aproximados representativos dos problemas reais.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método robusto de aproximação de soluções de equações diferenciais onde a equação diferencial é expressa em uma forma fraca (Problema Variacional de Valor de Contorno) e resolvida a partir da construção apropriada de espaços de aproximação. A origem do MEF normalmente é ligada ao artigo de Turner *et al.* (1956) e os primeiros passos de desenvolvimento na década de 60 foram dados por engenheiros, baseando-se na experiência e em experimentações numéricas (WILLIAMSON, 1976). A análise matemática do MEF começou mais tarde, quase na década de 70, com os estudos de estimadores de erro e técnicas de remalhamento (SZABO; BABUŠKA, 1991). Em meados da década de 70, testes numéricos indicaram que o aumento do grau polinomial das funções de aproximação consistiam numa alternativa vantajosa (SZABO; MEHTA, 1978). Para distinguir entre as análise de erro no refinamento de malha e acréscimo do grau polinomial, os termos refino h e refino p foram adotados, respectivamente.

O refino h tradicional consiste em fixar o grau polinomial p e diminuir o tamanho da cobertura das funções locais de aproximação. Assim, caso a solução seja suficientemente suave, o teorema de Taylor garante que o erro de aproximação cometido em cada cobertura é da ordem de h^{p+1} . Alternativamente, o refino p consiste na fixação do tamanho da cobertura das funções locais de aproximação e acréscimo do grau polinomial p . Assim, o teorema de Weierstrass (que estabelece que o espaço de polinômios é denso no espaço de funções contínuas) garante que há convergência para a solução a ser aproximada (SZABO; BABUŠKA, 1991).

Ambas as metodologias fazem suposições somente acerca da regularidade das funções, não fazendo uso de quaisquer outras informações particulares do problema. Dessa forma, abordagens clássicas de elementos finitos resolvem muito custosamente (exigindo refinamento de malha e/ou altos graus polinomiais) problemas com soluções que contenham singularidades, descontinuidades ou características específicas.

A utilização de informações particulares para aprimorar as características de aproximação é o cerne dos métodos enriquecidos, como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), onde são utilizadas funções enriquecedoras que melhoram o espaço de aproximação. Neste contexto, o MEFG tem aplicações em diversas áreas, como mecânica da fratura, contornos granulares em policristais, escoamento de fluidos bifásicos, eletromagnetismo, transferência de calor com altos gradientes e, como abordado no presente trabalho, em dinâmica de estruturas.

Apesar das excelentes propriedades do MEFG, há aspectos que ainda limitam sua aplicabilidade prática e sua eficiência. Um desses fatores limitantes é a instabilidade numérica associada ao processo de enriquecimento presente mesmo em problemas de valor de contorno bem postos. Diversos estudos têm sido direcionados ao tratamento desse problema nos últimos anos, principalmente no contexto da mecânica da fratura. No entanto, há uma carência de estudos mais aprofundados discutindo a estabilidade do MEFG em análise dinâmica e, dessa forma, este trabalho é voltado à essa questão.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

Investigar a aplicação de técnicas de estabilização do Método dos Elementos Finitos Generalizados no contexto da Análise Dinâmica.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O escopo deste trabalho abrange:

- Revisar a literatura disponível no assunto;
- Aplicar variações de enriquecimento do MEFG em problemas da dinâmica;
- Avaliar a utilização de diferentes funções na construção da Partição da Unidade;
- Desenvolver e implementar o Método dos Elementos Finitos Generalizado Estabilizado, sugerindo formas alternativas de estabilização;
- Discutir os resultados obtidos quanto à acurácia, condicionamento e convergência.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 7 capítulos. O Capítulo 2 apresenta um panorama da evolução dos Métodos Enriquecidos, focando nos trabalhos voltados à aplicações na Análise Dinâmica e aos estudos relacionados com estratégias de estabilização.

O Capítulo 3 apresenta subsídios teóricos que embasam a aplicação dos Métodos Enriquecidos no contexto da Análise Dinâmica. São apresentadas as equações diferenciais pertinentes ao fenômeno estudado, estabelecendo assim o escopo das aplicações deste trabalho. Em seguida, é apresentada uma revisão dos conceitos de Análise Funcional que norteiam a aplicação dos métodos aproximados utilizados, garantindo sua validade. Adicionalmente, o desenvolvimento referente as equações diferenciais pertinentes ao fenômeno bidimensional é apresentado no Apêndice A.

O Capítulo 4 estende a discussão teórica da aplicação do MEFG, revisando seus fundamentos básicos. São apresentados os tipos de Partição da Unidade utilizados no presente trabalho, bem como a escolha do tipo de enriquecimento adotado para problemas da Dinâmica de Estruturas.

O Capítulo 5 expõe as técnicas de estabilização utilizadas no presente trabalho, apresentando suas formulações. São apresentadas duas modificações das funções de enriquecimento, sendo uma baseada no MEFG Estabilizado (MEFGE) e a outra de origem empírica.

O Capítulo 6 compila os resultados dos diversos testes numéricos realizados. Primeiramente são apresentados exemplos de análise modal e transiente unidimensionais, abordando

aspectos relacionados com a escolha do tipo de Partição da Unidade e a aplicação das técnicas de estabilização estudadas. Por fim, apresenta-se a extensão da proposta de estabilização para o caso de análise modal bidimensional.

As considerações finais do trabalho e sugestões para estudos futuros são apresentadas no Capítulo 7.

1.3 METODOLOGIA ADOTADA

A implementação computacional foi feita utilizando a linguagem de programação Python, que é de alto nível e orientada à objetos. Esta linguagem possui rotinas otimizadas para computação científica (como integração numérica com algoritmos adaptativos, resolução de problema de autovalores e autovetores e resolução de sistemas lineares) que são pré compiladas e de códigos baseados em Fortran e C++ (JONES *et al.*, 2014).

A utilização de uma linguagem orientada à objetos possibilitou a criação de classes, objetos e rotinas reaproveitáveis, que constituem uma facilidade para a continuação em trabalhos futuros.

Implementações em Maple foram utilizadas pontualmente, para o cálculo do número de condição das matrizes utilizando alta precisão numérica e integrações simbólicas, disponíveis no programa (MAPLESOFT, 2004).

Nas aplicações unidimensionais, as integrais foram calculadas numericamente utilizando o máximo de precisão disponível e buscando-se manter os erros numéricos tão reduzidos quanto possível. Para isso, foi utilizada uma rotina de integração do ScyPy (biblioteca de computação científica do Python) que regula o número de pontos de integração e subintervalos adaptativamente.

Para os testes bidimensionais, buscou-se evitar as integrações numéricas, visto que a qualidade desta integração é uma dificuldade ainda a ser superada. Assim, para focar no estudo pertinente a este trabalho, os testes foram programados em Maple, utilizando integração simbólica. Subsequentemente, os autovalores e autovetores foram obtidos numericamente.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica deste trabalho busca traçar um panorama da evolução dos Métodos Enriquecidos, dando ênfase aos trabalhos voltados à aplicações na Análise Dinâmica e aos estudos acerca da estabilidade, subsidiando as discussões pertinentes às estratégias de estabilização voltadas à aplicação do MEFG em Análise Dinâmica.

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS/ESTENDIDOS

A utilização de funções não-polinomiais para construção de espaços de aproximação no contexto do Método dos Elementos Finitos não é exclusividade do MEFG. Na década de 70 apareceram os primeiros trabalhos nessa linha (BYSKOV, 1970; FIX *et al.*, 1973; BENZLEY, 1974).

Byskov (1970) desenvolveu um elemento especial de placa visando lidar com as singularidades resultantes de trincas utilizando funções trigonométricas relacionadas com a natureza da solução analítica para propagação de trincas. Os resultados se mostraram relativamente acurados para aplicações práticas, apesar das simplificações impostas no formato dos elementos visando reduzir o esforço computacional de integração das funções não-polinomiais. No entanto, a característica de aproximação não-monotônica, decorrente da deterioração das características de aproximação local, e incertezas na faixa de 3 a 4% apontam a necessidade de estudos mais aprofundados para embasar o uso de funções não-polinomiais no contexto do MEF.

Fix *et al.* (1973) propuseram a inclusão de funções singulares na base do espaço de aproximação do MEF. Problemas com mal-condicionamento das matrizes foram apontados já nas primeiras experimentações, assim como técnicas para contornar esses problemas numéricos (FADDEEV; FADDEEVA, 1981). Foram tratados três problemas distintos: propagação de trinca em uma barra submetida a torção; extração de modos naturais de uma membrana em formato de L; e a estrutura de duas regiões de um reator.

Os resultados numéricos obtidos por Fix *et al.* (1973) apontaram que a utilização de funções singulares na base de aproximação do MEF foram essenciais para a obtenção de boas características de acurácia. No entanto, foram relatados problemas de "quase dependência" entre

as funções de base do espaço de aproximação, independentemente da escolha da base padrão de elementos finitos. Ressalta-se a observação dos autores de que a utilização de *solvers* sem a preocupação de utilizar as especificidades das matrizes geradas pode resultar em grandes perdas em termos de instabilidade numérica.

Benzley (1974, citado por Liebowitz e Moyer, 1989) apresentou um estudo pioneiro em análise elastoplástica tridimensional. O trabalho empregou elementos finitos modificados com funções não-polinomiais para a modelagem de trincas estacionárias, suscitando discussões acerca da construção de espaços de aproximação customizados conforme necessidades específicas.

Os trabalhos de Byskov (1970), Fix *et al.* (1973), Benzley (1974) apesar de pioneiros apresentavam dificuldades em garantir a estrutura local das matrizes de rigidez e massa resultantes. Abordagens mais robustas e com um forte embasamento matemático foram expostas por Babuška *et al.* (1994), com o foco voltado para a resolução de problemas de segunda ordem com coeficientes não suaves. Nos métodos apresentados foram utilizadas funções especiais que, agregadas ao espaço de aproximação do MEF, refletiam as características especiais da solução a ser aproximada. Especificamente no 3º método apresentado por Babuška *et al.* (1994), as funções adicionadas no espaço de aproximação do MEF são resultantes de uma multiplicação entre funções não-polinomiais (fabricadas segundo a natureza do problema) e as funções lineares tradicionais de elementos finitos. Esse processo implica em as novas funções de aproximação possuírem suporte compacto. A construção deste 3º método está calcada em ideias que seriam posteriormente detalhadas por Melenk (1995) utilizando os conceitos relacionados a Partição da Unidade (PU)(ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1977).

Em sua tese, Melenk (1995) embasou matematicamente e ilustrou com exemplos a teoria do que seria o chamado de Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade (MEFPU), ou simplesmente Método da Partição da Unidade (MPU) (BABUŠKA; MELENK, 1997; MELENK; BABUŠKA, 1996). Melenk (1995) mostrou que as funções lineares utilizadas no 3º método apresentado por Babuška *et al.* (1994) poderiam ser substituídas por quaisquer outras funções que formassem uma Partição da Unidade e que possuísem suporte compacto, garantindo as propriedades de aproximação, conformidade e regularidade. Babuška e Melenk (1997) e Melenk e Babuška (1996) apresentam resultados importantes e aplicações em problemas como: problemas resultante de equações com coeficiente não suaves; problemas envolvendo descontinuidades; problemas cuja solução possui características altamente oscilatórias.

Uma ideia análoga ao MPU embasou o Método das Nuvens $h - p$ (DUARTE; ODEN, 1996a, 1996b). Esse método consiste em criar uma aproximação semelhante a obtida pelo MEF

sem a necessidade de uma malha, seguindo a tendência dos Métodos Sem-Malha e possibilita a utilização de funções não-polinomiais no espaço de aproximação. Nesse contexto, foi proposta por Oden e Duarte (1997) a utilização de funções contendo a solução analítica para problemas de propagação de trincas. Oden e Duarte (1997) mostraram que um dos aspectos mais atrativos dessa abordagem é justamente a possibilidade de utilizar funções customizadas, respaldando-se em uma Partição da Unidade gerada por elementos finitos e resultando em uma taxa de convergência exponencial, facilitando, por exemplo, o tratamento de problemas da mecânica da fratura.

Strouboulis *et al.* (2000a) apresentam o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) como uma combinação entre os MEF e o MPU onde os espaços de aproximação do MEF são aumentados utilizando funções que refletem um conhecimento prévio acerca do problema. Exemplos como um domínio com furos e uma chapa em L são mostrados para ilustrar a performance do método. Os resultados decorrentes da teoria do MPU que embasam o MEFG implicam em uma estabilidade que não se podia garantir nas abordagens anteriores. Posteriormente, Strouboulis *et al.* (2000b) apresentaram aspectos sobre a implementação do MEFG, elucidando a construção do espaço de aproximação e ilustrando com exemplos contendo descontinuidades e buracos no domínio. Os resultados obtidos para os diversos exemplos mostram uma acurácia relativamente alta com uma malha consideravelmente mais pobre comparando com o MEF.

Strouboulis *et al.* (2001) apresentam uma extensa e completa explicação do MEFG incluindo: aspectos de sua implementação, utilização de algoritmos específicos de integração numérica, análise de um *solver* para sistemas lineares semi-definidos ou quase semi-definidos assim como diversos exemplos de aplicação. O MEFG é interpretado como uma variação do MEF com o aumento do espaço de funções não-polinomiais com suporte compacto, sendo que os resultados obtidos mostram que apenas algumas funções de enriquecimento são suficientes para aproximar satisfatoriamente soluções singulares.

Independentemente dos trabalhos de Strouboulis *et al.* (2000a, 2000b, 2001), surgiram outras investigações envolvendo a utilização de espaços enriquecidos embasados na Partição da Unidade. O estudo de Belytschko e Black (1999) apresenta um elemento finito especialmente desenvolvido para a propagação de trincas. O método utilizado permite modelar a propagação sem a necessidade de refazer a malha de elementos finitos repetidas vezes. O ponto chave nessa abordagem é a inserção de funções descontínuas no espaço de aproximação utilizando os elementos finitos originais para construção da partição da unidade. Os resultados obtidos em aplicações bidimensionais apresentaram grande acurácia e o método se mostrou bastante

promissor no contexto da mecânica da fratura.

Seguidamente, Möes *et al.* (1999) apresentaram uma metodologia que permitia representar a trinca independentemente da malha, eliminando a necessidade de remalhamento. Os resultados numéricos elucidam a robustez do método cuja aplicabilidade se mostrou promissora. Diferentemente do esquema mostrado por Benzley (1974), nos primórdios das técnicas de enriquecimento, a acurácia deste processo baseado na partição da unidade é praticamente independente do tamanho do elemento utilizado, tornando-o mais estável (MÖES *et al.*, 1999).

As metodologias de Belytschko e Black (1999) e Möes *et al.* (1999) são unificadas sob o nome Método dos Elementos Finitos Estendidos na tese de Dolbow (1999). Logo em seguida, os trabalhos de Sukumar *et al.* (2000), Daux *et al.* (2000), Dolbow *et al.* (2000) consolidaram a abordagem, aplicando-a em problemas de propagação de trincas em domínios 3D.

MEFG e MEFE seguem basicamente a mesma metodologia, apesar de suas origens distintas, e podem ser vistos de forma unificada (BELYTSCHKO *et al.*, 2009). Diversos trabalhos utilizando MEFG/MEFE foram realizados nos últimos anos nas mais diversas áreas, como: mecânica da fratura (YAZID *et al.*, 2009; GUPTA *et al.*, 2015), contornos granulares em policristais (SIMONE *et al.*, 2006), escoamento de fluidos bifásicos (ESSER *et al.*, 2010; SAUERLAND; FRIES, 2013), eletromagnetismo (LU; SHANKER, 2007), dinâmica de estruturas (ARNDT, 2009; TORII, 2012; SHANG, 2014), acústica (HARARI, 2006) e transferência de calor com altos gradientes (O'HARA *et al.*, 2009; ARAGÓN *et al.*, 2010). Demais exemplos de aplicação podem ser encontrados na revisão do estado da arte realizada por Belytschko *et al.* (2009).

2.2 MÉTODOS ENRIQUECIDOS APLICADOS À DINÂMICA DE ESTRUTURAS

O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta numérica robusta e versátil utilizada amplamente (BATHE, 1996). Entretanto, a estrutura de aproximação do MEF tende a não ser tão eficaz quando o problema estudado envolve características específicas, como descontinuidades, singularidades e altos gradientes (BATHE, 1996; HARARI, 2006). Neste contexto, os Métodos Enriquecidos, entre eles o MEFG e MEFE, apresentam uma flexibilidade na construção dos espaços de aproximação que permite a utilização de informações particulares do problema e o aumento da acurácia e da taxa de convergência.

Lee e Cangellaris (1992) mostraram um estudo dos erros numéricos cometidos na aproximação de ondas utilizando o MEF. Os resultados expostos ressaltam a dificuldade de aproximar com qualidade as soluções sofrendo forte influência das condições de contorno e

características da malha. Posteriormente, Guddati e Yue (2004) propuseram modificações no processo de integração para reduzir erros por dispersão nas aplicações do MEF em problemas de propagação de ondas. Os erros cometidos na aproximação por MEF podem ser elevados e a acurácia pode ser rapidamente deteriorada para excitações harmônicas (IHLENBURG; BABUŠKA, 1995, 1997; DERAEMAERKER *et al.*, 1999; BABUŠKA; SAUTER, 2000).

Diversas abordagens foram propostas tentando contornar os problemas de aproximação em análise dinâmica. Dentre esses estudos, é possível destacar um grupo de métodos orientados à análise dinâmica que incluem algum tipo de modificação ou enriquecimento no espaço de aproximação. Alguns desses métodos são:

- Métodos Espectrais (GOTTLIEB; ORSZAG, 1977; KOMATITSCH; VILOTTE, 1998; OSTACHOWICZ *et al.*, 2012)
- Método dos Modos Componentes (MMC) (WEAVER; LOH, 1985)
- Método dos Modos Admissíveis (MMA) (ENGELS, 1992; GANESAN; ENGELS, 1992)
- Método Composto (MC) (ZENG, 1998; ARNDT *et al.*, 2003)
- Método dos Elementos Finitos p -Fourier (MEFF) (LEUNG; CHAN, 1998)
- Método da Partição da Unidade (MPU) (BEL *et al.*, 2005; HAZARD; BOUILLARD, 2007; KACIMI; LAGHROUCHE, 2010)
- Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE) (ROZYCKI *et al.*, 2008; ELGUEDJ *et al.*, 2009; GRAVOUIL *et al.*, 2009)
- Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (ARNDT, 2009; GARCIA *et al.*, 2010; TORII, 2012; TORII; MACHADO, 2012; SHANG, 2014)
- MEFG-Adaptativo (MEFGA) (ARNDT, 2009; ARNDT *et al.*, 2010)
- MEF Enriquecido para propagação de ondas (KOHNO *et al.*, 2010; HAM; BATHE, 2012)

O Método Espectral (ME) utiliza funções harmônicas para construir a base de um espaço de aproximação. Assim, as aproximações são bastante próximas das soluções exatas (GOTTLIEB; ORSZAG, 1977). No entanto, devida a característica analítica do método, a sua aplicação se torna difícil para domínio complexos.

Estendendo os conceitos do ME a uma divisão em subdomínios, constrói-se o Método dos Elementos Espectrais (MEE) (KOMATITSCH; VILOTTE, 1998). No MEE são utilizados

elementos finitos lagrangeanos de alta ordem, escolhendo-se cuidadosamente o posicionamento dos graus de liberdade nodais e adotando-se esquemas especiais de integração. O MEE leva a baixa dispersão numérica e a uma matriz de massa diagonal, mas não apresenta comportamento hierárquico e suas peculiaridades no posicionamento dos graus de liberdade nodais dificulta a aplicação em estruturas complexas.

Complementando a família de métodos espectrais, é possível citar o Método dos Elementos Finitos Espectral (OSTACHOWICZ *et al.*, 2012). Desenvolvido para resolver certos problemas de propagação de ondas, utiliza aproximações feitas por polinômios trigonométricos. A aplicação envolve a transformação das equações governantes para o domínio da frequência, onde é realizada a aproximação, e uma transformação inversa para o domínio do tempo. Apesar de sua acurácia, os processos de transformação tornam o método oneroso computacionalmente.

Por vezes, a simplificação imposta em uma modelagem numérica, apesar de sutil, pode implicar em resultados muito diferentes dos reais. Segundo Weaver e Loh (1985), a resposta numérica de estruturas treliçadas pode ser bastante prejudicada ao se omitir o efeito de vibrações transversais localizadas. Assim, Weaver e Loh (1985) propuseram a utilização de funções de forma que replicassem esse efeito. O procedimento nomeado MMC apresentou resultados que mostraram a possibilidade de obter um modelo mais próximo do observado na prática através de um processo de enriquecimento do espaço de aproximação.

Posteriormente, baseando-se nas ideias de Craig (1981), o MMA foi proposto por Engels (1992), Ganesan e Engels (1992), cuja metodologia está intrinsecamente ligada ao conceito dos método enriquecidos pois consiste em uma expansão do espaço de aproximação de deslocamentos tradicional do MEF. No MMA o espaço de deslocamentos do MEF, denominado no método de "espaço de deslocamentos estáticos", tem base polinomial, enquanto o espaço de deslocamentos dinâmicos possui uma base composta pelos modos admissíveis de vibração da estrutura que se anulam nos nós do elementos.

O MEF tem convergência do refino p garantida pelo teorema de Weierstrass (SZABO; BABUŠKA, 1991) e sua aproximação é monotônica (ODEN; REDDY, 1976). No entanto, a aproximação do MEF é feita por polinômios enquanto as soluções analíticas da análise dinâmica envolvem termos não-polinomiais como funções trigonométricas. Visando utilizar esse conhecimento acerca da natureza da solução, Zeng (1998) propôs uma forma de adicionar termos relacionados à solução analítica ao espaço de aproximação gerado pelo MEF.

O método proposto por Zeng (1998), denominado MC, garante propriedades de conformidade e completude do espaço de aproximação pois conservam as funções de forma originais. Quando comparados aos resultados do MEF com ordem constante, os resultados do MC se mos-

traram consideravelmente superiores. Posteriormente, trabalhos como de Arndt (2001), Hoefel (2002) para vigas de timoshenko, Carvalho (2002) para placas espessas e Arndt *et al.* (2003) investigaram a aplicabilidade do MC em análise dinâmica. Mais tarde, Arndt (2009) apontou que o MC pode ser visto como um caso particular do MMA onde os modos admissíveis escolhidos são os próprios modos de vibração analíticos.

Leung e Chan (1998) propuseram utilizar termos da série de Fourier juntamente com polinômios no processo de refinamento p . Dessa forma, as características bem comportadas das séries de Fourier amenizam o mau condicionamento de graus polinomiais elevados, melhorando as características de aproximação.

O Método dos Elementos Finitos p -Fourier (MEFF) consiste na utilização de funções de forma baseadas nas séries de Fourier construídas apropriadamente para se anular nos nós dos elementos, analogamente ao MMA (ENGELS, 1992) e MC (ZENG, 1998). Aplicações do MEFF à análise modal de vigas uniformes mostraram excelentes taxas de convergência. No entanto, o trabalho original de Leung e Chan (1998) não comparou o MEFF com outros métodos.

Estratégias de enriquecimento embasadas nos conceitos do MPU e MEFG/MEFE foram apresentadas por Bel *et al.* (2005), Hazard e Bouillard (2007), Kacimi e Laghrouche (2010), Rozycki *et al.* (2008), Arndt (2009), Elguedj *et al.* (2009), Gravouil *et al.* (2009), Garcia *et al.* (2010), Kohno *et al.* (2010), Torii e Machado (2012), Torii (2012), Ham e Bathe (2012), Shang (2014), Torii *et al.* (2015).

Bel *et al.* (2005) apresentaram uma aplicação do Método da Partição da Unidade ao problema de vibração forçada em placas. O estudo foi orientado a problemas cuja frequência de excitação fosse moderada e desconsiderando amortecimento, se restringindo ao domínio da frequência. Os testes numéricos demonstraram boa acurácia e uma relativa redução no tempo computacional. No entanto, o método exige um processo iterativo em busca de convergência que depende de transformações do domínio da frequência para o domínio do tempo implicando em aumento do custo computacional e podendo inserir erros na aproximação.

Posteriormente, Hazard e Bouillard (2007) aplicaram o MPU ao problema de vibração de placas espessas do tipo sanduíche com camadas viscoelásticas. Os resultados foram comparados com os então obtidos na utilização de softwares comerciais, revelando-se mais precisos. Porém, assim como no trabalho de Bel *et al.* (2005), Hazard e Bouillard (2007) não realizaram análises dinâmicas para resposta no tempo.

É válido ressaltar que os enriquecimentos utilizados por Bel *et al.* (2005) e Hazard e

Bouillard (2007) influenciam na aproximação dos graus de liberdade nodais e, portanto, acabam implicando na utilização de métodos de penalização para a aplicação de condições de contorno.

Rozycki *et al.* (2008) observaram que, segundo as condições de estabilidade de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) (MOURA; KUBRUSLY, 2012), o refino da malha de elementos finitos implica em uma diminuição do passo de tempo necessário para garantir estabilidade. Dessa forma, Rozycki *et al.* (2008) propuseram a aplicação do MEFE no contexto de análise dinâmica transiente visando reduzir a necessidade de utilizar elementos finitos com dimensões muito pequenas e, conseqüentemente, aliviar as condições de estabilidade numérica. É feita uma caracterização teórica da aplicação em um elemento 1D e os resultados são generalizados para elementos 2D e 3D. A formulação proposta trabalha a possibilidade de vazios no elementos sem a necessidade de inserir essa condição nas funções de enriquecimento. Por fim, os resultados apresentados por Rozycki *et al.* (2008) se mostraram tão bons quantos os obtidos pela formulação tradicional do MEF e com menor custo computacional.

Com o mesmo intuito de aliviar a condição de estabilidade da modelagem transiente, Elguedj *et al.* (2009) propuseram um esquema de agrupamento da matriz de massa que possibilitou a utilização de passos de tempo maiores. O trabalho estudou o comportamento dinâmico no meio incluindo a situação de trinca e apresentou alto grau de precisão.

Pouco tempo depois, Gravouil *et al.* (2009) combinam a metodologia de agrupamento de massa proposta por Elguedj *et al.* (2009) com um esquema dinâmico explícito dedicado para o MEFE. A abordagem mostrou uma independência dos enriquecimentos em relação às condições de estabilidade (GRAVOUIL *et al.*, 2009). Por fim, a metodologia exposta permite flexibilização na escolha do tamanho do passo de tempo sem sacrificar a acurácia da aproximação em problemas de análise dinâmica envolvendo propagação de trincas (GRAVOUIL *et al.*, 2009).

Mais tarde, Kacimi e Laghrouche (2010) abordaram o problema de ondas elásticas utilizando o Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU) com o intuito de melhorar a aproximação para altas frequências. Foram utilizados termos trigonométricos na construção do espaço de aproximação, o que resultou em uma considerável melhora da acurácia, principalmente para frequências mais elevadas.

A natureza altamente oscilatória das funções de aproximação, principalmente quando se pretende aproximar frequências mais elevadas, onera as integrações numéricas. Para contornar esse problema, Kacimi e Laghrouche (2010) propuseram um procedimento *ad hoc* de integração exata que, quando comparada com a quadratura de Gauss-Legendre, reduz drasticamente o tempo computacional gasto no processo de montagem das matrizes.

A performance da aplicação de Kacimi e Laghrouche (2010) é limitada pelo aumento da densidade das matrizes, que eleva o custo computacional, e pela considerável deterioração do condicionamento, que pode comprometer severamente a resposta numérica.

Buscando melhores resultados numéricos no estudo da dinâmica de estruturas, Arndt (2009) investigou a aplicação do MEFG na análise de vibrações livres de estruturas reticuladas. O estudo apresentou formulações variacionais para os problemas de barra, vigas de Euler-Bernoulli e pórticos, bem como desenvolveu os respectivos elementos finitos generalizados. Arndt (2009) propôs enriquecimentos envolvendo termos trigonométricos que levaram a resultados com excelente acurácia, comparativamente com MEF e MC com mesmo número de graus de liberdade. Por fim, Arndt (2009) desenvolveu um esquema iterativo voltado para análise dinâmica, nomeado de MEFG Adaptativo, que permite a obtenção de frequências naturais de vibração específicas com grande acurácia e menor custo computacional, como apresentado por Arndt *et al.* (2010).

Os estudos de Arndt (2009), que se restringiram a análise modal, foram estendidos por Torii (2012) que aplicou o MEFG à análise modal e transiente de barras, vigas de Euler-Bernoulli, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões. Os exemplos apresentados demonstraram o potencial do MEFG para aplicações em análise dinâmica, principalmente para os casos em que os carregamentos excitam modos com frequências mais elevadas, como apresentado também por Torii e Machado (2012). É válido ressaltar que apesar dos resultados acurados e sucesso nas aplicações, foram relatados problemas no condicionamento dos problemas modelados pelo MEFG, sendo necessário o uso de precisão numérica elevada (ARNDT, 2009) ou ajuste das funções de enriquecimento (TORII, 2012).

Dando continuidade aos trabalhos de Arndt (2009) e Torii (2012), Shang (2014) estudou o MEFG no contexto de propagação de ondas elastoplásticas. Shang (2014) comparou as aplicações do algoritmos de Newmark, HHT e Alfa-generalizado para a análise elastodinâmica transiente utilizando aproximações por MEF, MEFG e MEF Hierárquico. O enriquecimento proporcionou redução da oscilação numérica na resposta ao longo do tempo, mas apresenta certa sensibilidade na questão da integração, podendo gerar resultados incoerentes (SHANG, 2014).

Independentemente de Arndt (2009), Torii (2012) e Shang (2014), Garcia *et al.* (2010) aplicaram o MEFG com partição da unidade C^k com enriquecimento polinomial para o problema de vibração livre não-amortecida de barras, obtendo bons resultados. Em seu trabalho, Garcia *et al.* (2010) discutiram a influência da regularidade da partição da unidade na aproximação de frequências mais elevadas. Os resultados obtidos por Garcia *et al.* (2010) fo-

ram comparados com o MEF em termos de espectro de frequências, apresentando um comportamento mais acurado para frequências mais altas a medida que a regularidade da PU, regulada pela formulação das funções de Shepard do MEFG C^k , era incrementada.

Em outro campo de aplicação, Kohno *et al.* (2010) apresentaram um procedimento para lidar com um caso específico envolvendo propagação de ondas em plasma. O método adotado por Kohno *et al.* (2010) concilia a robustez do MEF com a capacidade do Método Espectral em aproximar fenômenos oscilatórios através de um enriquecimento de elementos de baixa ordem do MEF com as funções harmônicas do ME. Kohno *et al.* (2010) mostram que as condições de contorno são facilmente impostas através de funções peso, de forma que as condições de Dirichlet podem ser totalmente satisfeitas enquanto que as de Neumann atendidas de forma aproximada. O procedimento depende da adoção apropriada de três parâmetros numéricos cujos critérios de escolha são apresentados por Kohno *et al.* (2010). Os resultados numéricos de exemplos unidimensionais compararam a performance com MEF tradicional, mostrando-se consideravelmente mais acurados e com custo computacional equivalente.

Posteriormente, Ham e Bathe (2012) estenderam a abordagem anteriormente apresentada por Kohno *et al.* (2010) para problemas n-dimensionais e apresentaram aspectos de sua implementação. O espaço de aproximação é construído através da combinação de elementos finitos lagrangeanos e funções harmônicas. São apresentados diversos exemplos numéricos 2D para ilustrar o método mostrando sua acurácia. Para contornar os problemas de condicionamento encontrados, Ham e Bathe (2012) propõem um esquema prático de estabilização da matriz de massa que consiste numa simples perturbação da matriz de massa consistente com uma combinação das matrizes de massa consistente e agrupada associadas a um parâmetro α empírico. A estratégia de estabilização da matriz de massa visa contornar possíveis problemas de mal-condicionamento e não reduzir a dispersão ou dissipação artificial da aproximação.

2.3 ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO MEFG/MEFE

Apesar das excelentes propriedades do MEFG/MEFE como alta acurácia, versatilidade de aplicação e excelentes taxas de convergência, há aspectos que ainda limitam sua aplicabilidade prática e sua eficiência. Um desses fatores limitantes é a instabilidade numérica associada ao processo de enriquecimento presente mesmo em problemas de valor de contorno bem postos. As matrizes do MEFG/MEFE podem ser consideravelmente mal-condicionadas, podendo resultar em uma perda de acurácia da aproximação, e até mesmo resultando em matrizes numericamente singulares (BABUŠKA; BANERJEE, 2012; ZHANG *et al.*, 2014).

A instabilidade numérica pode ser resultante de dependências lineares entre as funções resultantes do espaço de aproximação enriquecimento (TIAN *et al.*, 2006; AN *et al.*, 2011, 2012; TIAN, 2013) ou dificuldades de definição da malha em problemas com descontinuidades (CHOI *et al.*, 2012; LOEHNERT, 2014). Mesmo sendo um tema pertinente, ainda é pouco explorado pois existem surpreendentemente poucos trabalhos abordando as questões de quase singularidade das matrizes coeficientes e problemas mal-condicionados (LOEHNERT, 2014).

A estabilização dos métodos de aproximação baseados no MEF utiliza três estratégias principais: reconstrução geométrica da malha, pré-condicionamento das matrizes coeficientes e modificação das funções de aproximação. Por vezes, é utilizada apenas uma técnica, visando estudar seu impacto e eficiência na solução do problema. Por outro lado, a combinação de diversas estratégias pode apresentar excelentes resultados e mostrar a sinergia entre métodos.

No contexto da modelagem do fluxo fluido no entorno de um cilindro utilizando MEF, Choi *et al.* (2012) observaram que a proximidade relativa das descontinuidades de campo de aproximação com os nós na malha se relaciona com problemas de condicionamento. A redução da área de integração parcial dentro de um elemento até valores muito pequenos faz com que o condicionamento da matriz resultante possa ser significativamente deteriorado, resultando em instabilidade numérica da solução.

Para contornar esse problema, Choi *et al.* (2012) propuseram um esquema iterativo de reposicionamento dos nós. O processo é encerrado após ser atingido um determinado nível de tolerância para a razão entre área de integração parcial e área total do elemento. No trabalho em questão, o nível parâmetro mínimo adotado foi de 0,5%. O ganho em condicionamento desta abordagem é relativo e naturalmente dependente do critério de tolerância escolhido. Adicionalmente, é válido ressaltar que há um custo computacional adicional envolvido na execução do procedimento proposto por Choi *et al.* (2012) para reposicionamento de nós, o que pode tornar essa alternativa desvantajosa.

De fato, o posicionamento dos nós se relaciona com a estabilidade do problema, especialmente quando há descontinuidades no campo de aproximação nas vizinhanças dos nós (DAUX *et al.*, 2000; DUARTE; KIM, 2008; SIAVELIS *et al.*, 2013; LOEHNERT, 2014). Por exemplo, em duas dimensões, quando a razão entre a área de integração e a área do elemento é menor que 1%, o problema apresenta uma quase dependência linear (LOEHNERT, 2014).

Loehnert (2014) propôs um esquema de estabilização do MEF aplicado a problemas de propagação de trincas. A técnica exposta analisa o espectro da matriz de rigidez em busca de autovalores nulos sem significado físico, em razão de causarem os problemas de dependência linear numérica encontrados. Após um processo de identificação, os graus de liberdade relativos

aos autovalores identificados são modificados em função de um parâmetro ε . De forma complementar a modificação da matriz de rigidez, Loehnert (2014) sugere o reposicionamento, quando conveniente, dos nós de forma a minimizar os problemas de proporção de área de integração citados anteriormente.

A metodologia proposta por Loehnert (2014) obteve bons resultados para os exemplos de propagação de trincas individuais em 2 e 3 dimensões, apresentando redução significativa do esforço computacional e conservação de boa acurácia. De fato, a redução do custo computacional indica que houve sucesso na estabilização pois a taxa de convergência dos *solvers* iterativos, muito utilizados devido a sua versatilidade e eficiência, é diretamente afetada pelo condicionamento das matrizes envolvidas.

Focando no tratamento das matrizes coeficientes, Béchet *et al.* (2005) desenvolveram um pré-condicionador para o MEFE aplicado a propagação de trincas baseando-se em uma decomposição de Cholesky de submatrizes da matriz de rigidez. Apesar da solução elegante e eficaz, a metodologia possui uma limitação importante: não se aplica quando a trinca passa sobre o nó ou coincide com a borda de um elemento.

Considerando que problemas de dependência linear tendem a se agravar em domínio com muitos elementos enriquecidos, Menk e Bordas (2011) propuseram uma estratégia de pré-condicionamento baseada na técnica de decomposição de domínio FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*). A ideia consiste em dividir o domínio de forma a limitar a taxa de elementos enriquecidos e evitar condições onde o enriquecimento é pouco eficaz e resulta em mal condicionamento. O método envolve a aplicação de decomposições de Cholesky e LQ nas matrizes de rigidez dos subdomínios e apresenta resultados de condicionamento próximos aos do MEF. No entanto, o esforço computacional é fortemente dependente de como o domínio é particionado (MENK; BORDAS, 2011).

Devido às dificuldades de condicionamento tipicamente encontradas no métodos enriquecidos, alguns métodos de resolução de sistemas acabam não sendo tão explorados. Pode-se citar, por exemplo, o Método do Gradiente Conjugado (MGC), que é um método semi-iterativo bastante eficiente para matrizes grandes e esparsas. Dando uma nova perspectiva do MGC, Kim *et al.* (2015) desenvolveram um esquema de pré-condicionamento associado à matriz gerada pelo MEFG com abordagem global-local (MEFG-gl). Os resultados expostos no trabalho de Kim *et al.* (2015) mostram uma melhora significativa no condicionamento do sistema e redução sensível do tempo computacional. A técnica proposta é mais eficiente com a utilização de poucos termos de enriquecimento e tende a ter um desempenho mais significativo a medida que o tamanho do problema aumenta. No entanto, observa-se que há uma ligeira perda de acurácia

da solução aproximada, o que não representa necessariamente um problema para boa parte das aplicações de engenharia. A aplicação do MEFG-gl para o estudo de problemas de propagação de trincas é um tema emergente que demanda estudos, como aponta, por exemplo, o trabalho de Freitas (2015).

Com uma abordagem mais prática, Ham e Bathe (2012) propuseram uma técnica simples de estabilização da matriz de massa associada a uma abordagem de MEF enriquecido, nomeadamente MEFG. A saída proposta consiste na perturbação da matriz de massa consistente através de uma variação, dependente de um pequeno parâmetro α , da matriz de massa agrupada. Essa estratégia se mostrou eficaz nos exemplos apresentados por Ham e Bathe (2012) e pode ser uma alternativa no contexto das aplicações do MEFG em análise dinâmica. No entanto, é importante ressaltar que a modificação da matriz feita dessa forma pode implicar em perda de acurácia, pois há perda da garantia matemática de convergência (HUGHES, 2000).

A estabilização da matriz de massa de Ham e Bathe (2012) é uma das poucas tentativas de tratar problemas de estabilidade numérica encontrados (ARNDT, 2009; KOHNO *et al.*, 2010; HAM; BATHE, 2012; TORII, 2012; SHANG, 2014) na aplicação de métodos enriquecidos na análise dinâmica e propagação de ondas disponíveis na literatura. Dessa forma, justificam-se estudos mais aprofundados abordando a questão da estabilidade do MEFG/MEFE em análise dinâmica.

É interessante reparar que a técnica de perturbação da matriz apresentada por Ham e Bathe (2012) se assemelha a ideia de perturbação com uma matriz identidade apresentada em trabalhos iniciais do MEFG (STROUBOULIS *et al.*, 2000b, 2001). Ambas abordagens ((HAM; BATHE, 2012) - (STROUBOULIS *et al.*, 2000b, 2001)) perturbam uma matriz alvo (Matriz de massa - Matriz de rigidez) com um parâmetro ($\alpha - \epsilon$) multiplicado por uma matriz diagonal (Matriz de massa agrupada - Matriz identidade).

Os métodos baseados no MPU permitem relativa liberdade na escolha das funções de aproximação. Assim, uma alternativa plausível para alterar as características numéricas dos métodos enriquecidos é manipular as próprias funções base do espaço de aproximação. Essa alteração tem dois caminhos possíveis: escolha das funções componentes da PU e modificação das funções enriquecimento.

Testes utilizando funções *flat-top* no lugar das clássicas lagrangeanas C^0 (ou *hat*) foram feitos por Schweitzer (2003), com forte influência dos Métodos Sem-Malha (MSM), e posteriormente por Griebel e Schweitzer (2007). Mais tarde, o desenvolvimento de estimadores para o número de condição das matrizes resultantes da aplicação do MEFG/MEFE em uma PU *flat-top* e enriquecimentos polinomiais é apresentada por Li (2012).

Li (2012) expressou algebricamente estimadores de condicionamento para a matriz de massa e de rigidez e apresentou resultados numéricos corroborando o desenvolvimento teórico. Os argumentos matemáticos apresentados, e consequentemente os próprios estimadores, ressaltam que as características de estabilidade das matrizes são fortemente relacionadas com a escolha da PU, tipo de enriquecimento e características da malha.

Voltando a atenção para as funções enriquecimento, Babuška e Banerjee (2012) propuseram o Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado (MEFGE). O MEFGE consiste em uma simples modificação do enriquecimento que provoca uma *quasi*-ortogonalidade das funções enriquecidas em relação à Partição da Unidade. É interessante notar que uma modificação semelhante havia sido apresentada por Moës *et al.* (2003), também visando a melhoria da estabilidade, mas sem uma fundamentação teórica.

Babuška e Banerjee (2012) mostraram matematicamente que o MEFGE conserva as propriedades de acurácia do MEF, mantendo um condicionamento da mesma ordem que o MEF. Exemplos numéricos 1D foram escolhidos para mostrar com clareza a eficiência da técnica.

Posteriormente, Gupta *et al.* (2013) investigaram a acurácia e condicionamento do MEFGE aplicado à mecânica da fratura elástica linear 2D. Gupta *et al.* (2013) mostraram que um extensão direta dos conceitos apresentados por Babuška e Banerjee (2012) para a mecânica da fratura 2D leva a resultados menos acurados, necessitando uma escolha apropriada das funções de enriquecimento para manter boas taxas de convergência.

Foram apresentados por Gupta *et al.* (2013) diversos aspectos pertinentes a aplicação do MEFGE: adoção de critérios para escolha do nós a serem enriquecidos evitando dependências lineares; proposta de enriquecimento com funções de *heaviside*, levando a uma excelente convergência; adaptação das funções de enriquecimento na descontinuidades; e apresentação de orientações para a implementação do MEFGE em um código do MEF/MEFE.

Estendendo o desenvolvimento teórico do MEFGE, Zhang *et al.* (2014) explicitaram condições para a estabilização de alta ordem, elevando os níveis polinomiais de enriquecimento ($p > 1$). Zhang *et al.* (2014) provam que, atendidas certas condições referentes ao espaço de aproximação local, o MEFGE de alta ordem mantém condicionamento da mesma ordem de grandeza do MEF e acurácia tão boa quanto o MEF. Essas condições estão essencialmente relacionadas com a garantia de independência linear do conjunto de funções geradoras do espaço enriquecido e com as características de ortogonalidade dos subespaços não-enriquecido e enriquecido pelo MEFGE.

O atendimento dessas condições pode não ser trivial de ser garantida para funções não-polinomiais, o que demanda estudos futuros para tornar essa verificação mais versátil. Zhang *et al.* (2014) apresentam, então, uma proposta de enriquecimento baseados em funções *flat-top* que garantem ambas proposições. Visando ilustrar o desenvolvimento teórico, são apresentados diversos exemplos numéricos corroborando a estabilidade e acurácia do MEFGE.

Assim como Gupta *et al.* (2013) apresentaram a transição de aplicações 1D para 2D, Gupta *et al.* (2015) apresenta a extensão do escopo 2D para 3D. Gupta *et al.* (2015) mostraram numericamente que o MEFGE como proposto em Babuška e Banerjee (2012) não consegue manter boas taxas de convergência para a propagação tridimensional de trincas. Dessa forma, propõe-se um conjunto de funções de enriquecimento adicionais para a mecânica da fratura 3D que leva a uma alta taxa de convergência do MEFGE e com condicionamento igual ao MEF.

O trabalho de Gupta *et al.* (2015) contempla o estudo da aproximação dos valores de fatores de intensidade de tensão extraídos das soluções de MEFG e MEFGE, mostrando que sua acurácia pode ser deteriorada com o refinamento de malha no caso de enriquecimentos de estratégia topológica. Por fim, Gupta *et al.* (2015) mostram que o MEFGE, utilizando o enriquecimento adicional proposto, contorna essas dificuldades e apresenta melhor acurácia tanto para estratégias de enriquecimento geométricas e topológicas. É válido ressaltar que as discussões acerca da estabilidade e condicionamento do MEFG e MEFGE presentes no trabalho de Gupta *et al.* (2015) não contemplam problemas relativos ao posicionamento da superfície de trinca em relação ao nós da malha, o que está relacionado à instabilidade conforme comentado anteriormente.

Paralelamente aos avanços de aplicações na mecânica da fratura, Sauerland e Fries (2013) utilizaram pioneiramente as ideias do MEFGE para a modelagem de problemas de interface entre fluidos. Uma vez que os *solvers iterativos* tem sua performance intrinsecamente relacionada com o condicionamento das matrizes, a aplicação do MEFGE apresentou vantagem significativa em relação a abordagem clássica do MEF. Sauerland e Fries (2013) propõem um critério para redução de graus de liberdade de enriquecimento que reduz o custo computacional nas iterações mas que pode comprometer as propriedades de aproximação.

Apesar dos resultados positivos, o MEFGE não foi capaz de capturar com grande acurácia os saltos no gradiente de pressão. Assim, Sauerland e Fries (2013) levantam a possibilidade de aplicar enriquecimentos adicionais para abordar essa questão, analogamente ao proposto posteriormente por Gupta *et al.* (2015).

Considerando a tendência promissora do MEFGE, Paladim *et al.* (2013) apresentam estudos de convergência e aspectos de implementação computacional em C++ na biblioteca

Diffpack (LANGTANGEN, 2003).

Wu e Li (2015) propõem uma pequena alteração do MEFGE utilizando funções de *heaviside* e adotando uma estabilização intermediária dependente de um parâmetro k de forma que para $k = 0$ tem-se o MEFGE clássico e para $k = 1$ tem-se o MEFGE de Babuška e Banerjee (2012).

O método proposto, chamado de MEFGE Melhorado, depende fortemente do parâmetro k , que deve ser escolhido heurísticamente (WU; LI, 2015). Os testes numéricos que apresentam bons resultados para valores baixos de k , como $k \in [0.01, 0.05]$, conservam boa acurácia e melhoram o condicionamento. Dessa forma, é possível enxergar essa abordagem como uma perturbação de estabilização através de um parâmetro pequeno k , equilibrando acurácia e condicionamento, ressaltando a observação de que às vezes pequenas perturbações impactam significativamente no condicionamento.

Enquanto as abordagens relacionadas com o MEFGE buscam provocar uma *quasi*-ortogonalidade das funções enriquecidas, Sillem *et al.* (2015) apresentam o Método dos Elementos Finitos Generalizados Ortonormalizados (MEFGO), que utiliza explicitamente um processo de ortonormalização na base de funções de aproximação.

O MEFGO pode ser visto simplesmente como um processo de construção de uma base ortonormal enriquecida cuja matriz de rigidez resultante é otimamente bem condicionada. Os exemplos presentes no trabalho de Sillem *et al.* (2015) mostram um aumento na taxa de convergência para os casos unidimensionais das equações modificadas de Helmholtz e Poisson.

Apesar da abordagem analítica consistente do MEFGO, Sillem *et al.* (2015) não apresentam um estudo da sensibilidade numérica associada ao próprio processo de ortonormalização da base de funções de aproximação. Ou seja, o ganho de condicionamento, que melhora as condições de resolução do sistema de equações, aparenta vir ao custo da adoção de um processo numérico de ortonormalização com suas próprias instabilidade numéricas. Adicionalmente, é válido lembrar que a ortonormalização não é única e que depende do método adotado, escolha da ordem do processo e das próprias funções enriquecidas.

As estratégias de estabilização dos métodos enriquecidos se baseiam nas mais variadas premissas, das mais analíticas às mais empíricas. No entanto, a maior parte das abordagens para a avaliação do condicionamento é voltada apenas à matriz de rigidez. Porém, em problemas da análise dinâmica é utilizada também a matriz de massa, cujas características estão intrinsecamente relacionadas com a natureza do problema e sua sensibilidade numérica (PETROLI *et al.*, 2015).

Assim, nota-se que há a necessidade de propostas de estabilização que levem em conta as características inerentes ao campo de aplicação da análise dinâmica e os tipos de enriquecimento específicos utilizados para este fim. Dessa forma, destaca-se que há um vasto campo de pesquisa em aberto, principalmente no que tange as aplicações à análise dinâmica, tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo. Portanto, é neste contexto de inovação que está inserido o presente trabalho, buscando abordar questões apontadas por estudos anteriores acerca da estabilidade e sensibilidade a aplicação do MEFG na análise dinâmica, bem como visando motivar estudos correlacionados.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo é apresentada uma abordagem abstrata dos problemas de vibração. Primeiramente é apresentado o desenvolvimento desde a construção da equação diferencial a partir do fenômeno físico, estabelecendo o escopo das aplicações deste trabalho e subsidiando a formulação do Problema de Valor de Contorno sobre o qual são aplicados os métodos de aproximados como o MEFG.

Em seguida é feita uma consistente discussão da busca por uma solução aproximada sob a óptica da Análise Funcional, contemplando os aspectos matemáticos que embasam esse referencial teórico. A análise é separada em dois casos: Domínio do Tempo (Análise Transiente) e Domínio da Frequência (Análise Modal).

Para a conceituação da análise no Domínio do Tempo são discutidas a existência e unicidade de solução da forma fraca, regularidade das funções envolvidas e construção da solução aproximada pelo MEFG.

Dando continuidade, a análise no Domínio da Frequência é embasada com os conceitos de Teoria Espectral, apresentando-se o estudo da decomposição espectral do operador e a construção da solução aproximada pelo MEFG. Por fim, é utilizada a teoria de Rayleigh, abrangendo o quociente de Rayleigh como apresentado por exemplo por Oden e Reddy (1976) ou Becker *et al.* (1983), para caracterizar o espectro de frequências e estudo dos erros de aproximação.

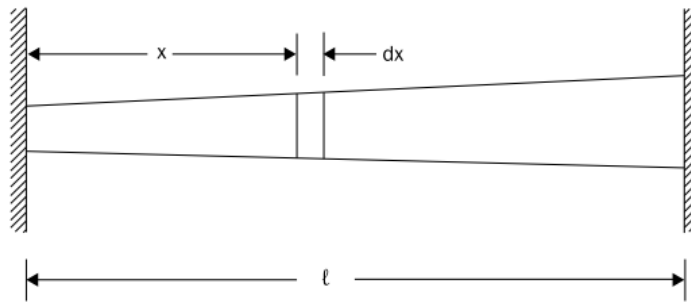
3.1 CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Ao longo dessa seção serão desenvolvidos os modelos matemáticos dos elementos analisados, baseando-se em referências clássicas como Rayleigh (1945), Becker *et al.* (1983) e Bathe (1996), mas procurando seguir a cadeia lógica didática de Leissa e Qatu (2011). As equações diferenciais referente ao problema de vibração forçada não amortecida serão deduzidas a partir do equilíbrio físico para o caso unidimensional escolhido (barra reta), subsidiando a solução aproximada através da construção do Problema de Valor de Contorno. O desenvolvimento do caso bidimensional (membrana) pode ser encontrado no Apêndice A do presente

trabalho.

3.1.1 1D - BARRA RETA

Considere-se uma barra ou eixo reto de comprimento l e área de seção transversal A variável, conforme a figura 1. Por simplicidade, considere-se que a seção transversal não varia bruscamente e mantém forma constante, apenas variando sua área em função da posição relativa horizontal x . O material constituinte é considerado de comportamento linear com módulo de elasticidade E podendo variar em função de x e possui massa específica ρ . Adicionalmente, é possível considerar um carregamento uniformemente distribuído p agindo.



**Figura 1- Barra reta de comprimento l e seção transversal A .
FONTE: Adaptado de Leissa e Qatu (2011)**

Analisando um elemento infinitesimal de comprimento dx distante a x do apoio da esquerda, tem-se o diagrama de corpo livre exposto na figura 2. A força P interna indicada é decorrente da tensão σ_x agindo através da área $A(x)$. Naturalmente, P varia ao longo do comprimento e conforme o tempo, ou seja $P = P(x, t)$.

O equilíbrio dinâmico do elemento infinitesimal poder ser equacionado através do somatório de forças como:

$$-P + \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) + p dx = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (1)$$

Na equação 1 u é o deslocamento na direção longitudinal. Lembrando que a força P é resultante da tensão σ_x agindo sobre a área A , é possível escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x A) + p = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

Como o comportamento linear do material permite estabelecer a relação

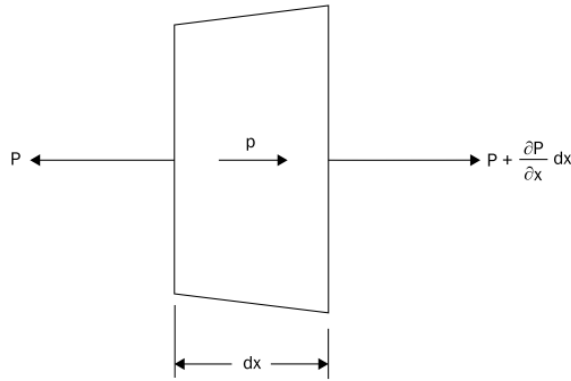


Figura 2- Diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal.
FONTE: Adaptado de Leissa e Qatu (2011)

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

Então, a equação 2 é reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Para o caso simplificado de secção transversal constante e material homogêneo, a equação 4 toma a forma:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p}{A} = \bar{p} \quad (5)$$

Consequentemente, para o caso de vibração livre, ou seja $p = 0$, tem-se:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

É válido ressaltar que, com uma transformação de variáveis ou com uma escolha apropriada de unidades, tal que $\frac{\rho}{E} = 1$, as equações 5 e 6 podem ser reescritas adimensionalmente, explicitando a aplicação dos operadores Laplaciano ($\Delta = \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$) e d'Alembertiano ($\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$), como visto nas equações 7 e 8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \bar{p} \quad \longrightarrow \quad \square u = \bar{p} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \longrightarrow \quad \square u = 0 \quad (8)$$

3.2 TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Uma vez determinadas as equações diferenciais que descrevem o problema a ser modelado e aproximado, deve-se recorrer à análise funcional para embasar a teoria de aproximação.

Primeiramente, é pertinente elucidar os conceitos matemáticos básicos relativos a esse estudo. Dessa forma, ao longo desta seção são destacadas algumas definições com o intuito de esclarecer os resultados obtidos posteriormente. Em seguida, são apresentados teoremas, lemas e corolários que norteiam a aplicação do MEFG nos problemas contemplados no escopo deste trabalho.

Os resultados apresentados nessa seção procuram estruturar uma linha didática entorno de referências que permeiam desde trabalhos mais teóricos voltados ao estudo da Análise Funcional como Riesz (1916), Yosida (1955), Schaefer (1959), Brezis (2011), Krubusly (2012) a estudos mais orientados a Base Matemática do Método dos Elementos Finitos como Oden e Reddy (1976), Becker *et al.* (1983), Brenner e Scott (2000), Enr e Guermond (2004).

3.2.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Inicialmente, é preciso definir os espaços de funções com os quais serão trabalhados. Com essa definição dentro da teoria dos espaços de Banach, destaca-se as respectivas normas apropriadas, utilizadas nos desenvolvimentos posteriores.

Como uma extensão do estudo das funções integráveis, é possível agrupar as funções segundo suas propriedades de integrabilidade no sentido de Lebesgue. Nesse contexto tem-se os espaços L^p .

Definição 3.1 (Espaço L^p). *O espaço $L^p(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções cuja p -ésima potência é integrável no sentido de Lebesgue em Ω . Define-se ainda a norma $\|u\|_{0,p,\Omega}$, tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

Os espaços L^p reúnem informações sobre a própria função. No entanto, por vezes é necessário caracterizar não só a própria função como suas derivadas. Com este intuito, definem-

se os espaços de Sobolev $W^{s,p}$.

Definição 3.2 (Espaço $W^{s,p}$). *O espaço de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções cujas derivadas até a ordem s pertencem ao espaço $L^p(\Omega)$. Define-se ainda a norma $\|u\|_{s,p,\Omega}$, tal que:*

$$|u|_{s,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha u\|_{0,p,\Omega} \quad (10)$$

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{s,p,\Omega} = \sum_{l \leq s} |u|_{l,p,\Omega} \quad (11)$$

Para as funções quadrado integráveis, tem-se um caso particular dos espaços $W^{s,p}$ de grande importância no estudo da resolução de equações diferenciais e na teoria de aproximação. Esses espaços são chamados Espaços de Hilbert de ordem s (H^s).

Definição 3.3 (Espaço de Hilbert H^s). *O espaço de Hilbert $H^s(\Omega)$ é equivalente ao espaço $W^{s,p}(\Omega)$ para $p = 2$. Ou seja, $H^s(\Omega) \equiv W^{s,2}(\Omega)$.*

Uma vez definidos os objetos que farão parte do estudo, apresenta-se algumas propriedades que serão utilizadas oportunamente.

3.2.2 PROPRIEDADES DE ESPAÇOS DE FUNÇÕES

No contexto da teoria dos espaços de Banach, os espaços de funções apresentados são chamados, em função de suas propriedades, de espaços vetoriais. Uma primeira propriedade de espaços vetoriais é apresentada a seguir.

Definição 3.4 (Espaço de Separável). *Um espaço vetorial (ou métrico) E é dito separável se existe um subconjunto $D \subset E$ tal que D é contável e denso em E .*

Observação 3.5. *Diversos espaços de análise são separáveis segundo a definição 3.4. Tem-se, por exemplo, os espaços L^p com $1 \leq p < \infty$ e H_0^1 (BREZIS, 2011).*

A definição 3.4 é válida para os diversos casos de espaço vetorial, em específico para espaços de Hilbert. Para esse caso, apresenta-se um resultado útil no teorema 3.6.

Teorema 3.6. *Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal de Hilbert.*

Demonstração. A prova do teorema 3.6 deve ser separada em dois casos: quando o espaço de Hilbert é separável e quando é não-separável.

No caso separável, basta considerar um subconjunto (v_i) contável denso em um espaço de Hilbert H e o espaço linear F_k gerado por $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Pode-se notar que $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots \subset F_k$ e consequentemente $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ é denso em H .

Dessa forma, basta que se utilize um argumento de recorrência. Por exemplo, escolha $e_1 \in F_1$. Se $F_1 \neq F_2$ então há um vetor $e_2 \in F_2$ tal que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de F_2 . Assim, repetindo o processo obtêm-se uma base ortonormal para H .

Para o caso não-separável o argumento passa pela utilização do lema de Zorn para provar a existência de uma base não contável de Hilbert para H e para maiores detalhes consultar Brezis (2011).

□

3.2.3 TEORIA ESPECTRAL E OPERADORES COMPACTOS

A teoria de Riesz-Fredholm embasa o estudo da teoria espectral de operadores (KRUBUSLY, 2012; SCHAEFER, 1959; RIESZ, 1916). Como peça fundamental nessa teoria, tem-se a alternativa de Fredholm, que lida com a solvabilidade de equações do tipo $\lambda u - Tu = f$, onde T é um operador. Apresenta-se formalmente esse resultado no teorema 3.9 com o auxílio da base fornecida por Riesz.

Lema 3.7 (Lema de Riesz). *Seja E um espaço de Banach e seja $M \subset E$ um espaço linear fechado tal que $M \neq E$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ e $\text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $v \in E$ com $v \notin M$. Como M é fechado, então $d = \text{dist}(v, M) > 0$. Dessa forma, é possível escolher um $m_0 \in M$ tal que $d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}$. Com isso, é possível fabricar u da seguinte forma:

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} \quad (12)$$

Tal construção resulta em:

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \varepsilon \quad (13)$$

Assim, como $(m_0 + m\|v - m_0\|) \in M$, está demonstrado o Lema. □

Teorema 3.8 (Riesz). *Seja E um espaço de Banach. Seja ainda $B_E \subset E$ um subconjunto de E definido como $B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. se B_E é compacto, então E é de dimensão finita.*

Demonstração. O argumento central dessa demonstração é buscar uma contradição ao supor E de dimensão infinita. Com essa suposição pode dizer que existe uma sequência de subespaços

de dimensão finita E_n de forma que $E_{n-1} \subset E_n$ e $E_{n-1} \neq E_n$. Assim, pelo Lema de Riesz, existe uma sequência (u_n) com $u_n \in E_n$ tal que $\|u_n\| = 1$ e $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Em particular, $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ para $m > n$, o que implica que (u_n) não admite uma subsequência convergente, o que é uma contradição pois B_E é compacto. \square

Teorema 3.9 (Alternativa de Fredholm). *Seja o operador compacto $T : E \mapsto F$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então $R(\lambda I - T)$ é fechado e $\dim N(\lambda I - T) = \dim N(\lambda I - T^*) < \infty$, onde:*

- $R(\lambda I - T)$ é a imagem da transformação $(\lambda I - T)$
- $N(\lambda I - T)$ é o núcleo da transformação $(\lambda I - T)$
- $N(\lambda I - T^*)$ é o núcleo da transformação $(\lambda I - T^*)$
- T^* é o adjunto de T .

Demonstração. A demonstração é dividida em três partes.

- I:

Seja $E_1 = N(\lambda I - T)$. Então $B_{E_1} \subset T(B_E) \implies B_{E_1}$ é compacto. Assim, pelo Teorema de Riesz E_1 é de dimensão finita.

- II:

Seja a sequência de funções (f_n) tal que $f_n = \lambda u_n - T u_n \longrightarrow f$. Pode-se definir $d_n = \text{dist}(u_n, N(\lambda I - T))$ e, como $N(\lambda I - T)$ é de dimensão finita (Parte I), então existe $v_n \in N(\lambda I - T)$ tal que $\|u_n - v_n\| = d_n$. Assim, é possível escrever $f_n = \lambda(u_n - v_n) - T(u_n - v_n)$. Considerando que $\|u_n - v_n\|$ é limitado e que T é um operador compacto, é possível construir uma subsequência convergente $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \longrightarrow l$. Da definição de f_n tem-se então que $u_{n_k} - v_{n_k} \longrightarrow f + l$. Definindo $\lambda g = f + l$, tem-se $\lambda g - Tg = f$ e portanto $f \in R(\lambda I - T)$ implicando que $R(\lambda I - T)$ é fechado. Tem-se ainda, pelo fato do operador ser compacto que:

$$R(\lambda I - T) = N(\lambda I - T^*)^\perp \quad \text{e} \quad R(\lambda I - T^*) = N(\lambda I - T)^\perp \quad (14)$$

- III:

Seja $d = \dim N(\lambda I - T)$ e $d^* = \dim N(\lambda I - T^*)$. Buscando provar que $d^* \leq d$, suponha por contradição que $d < d^*$. Logo, como $N(\lambda I - T)$ é de dimensão finita, admite-se então um complemento em E . Dessa forma existe uma projeção $P : E \mapsto N(\lambda I - T)$. Por outro

lado $R(\lambda I - T) = N(\lambda I - T^*)^\perp$ (Parte II) possui codimensão finita d^* . Como foi suposto $d < d^*$, então existe um mapeamento injetivo $\Upsilon : N(\lambda I - T) \mapsto F$. Construindo $S \in E'$ tal que $S = T + \Upsilon \circ P$, tem-se que $N(\lambda I - S) = 0$ e portanto $R(\lambda I - T) = E$, o que implica em uma contradição pois existe pelo menos um $f \in F$ tal que $f \notin R(\Upsilon)$ resultando no fato da equação $\lambda u - Su = f$ não ter solução. Dessa forma, $d \leq d^*$ e portanto:

$$\dim N(\lambda I - T^*) \leq \dim N(\lambda I - T) \quad (15)$$

Repetindo o argumento para T^* , obtêm-se:

$$\dim N(\lambda I - T^{**}) \leq \dim N(\lambda I - T^*) \leq \dim N(\lambda I - T) \quad (16)$$

e como $N(\lambda I - T^{**}) \supset N(\lambda I - T)$, então $\dim N(\lambda I - T) = \dim N(\lambda I - T^*) < \infty$.

□

A alternativa de Fredholm caracteriza núcleo e imagem do operador (KRUBUSLY, 2012) subsidiando a garantia de existência de solução para o problema de autovalores e autovetores associado a um operador compacto. Dessa forma, buscaram-se ferramentas para poder classificar o operador estudado como compacto. Uma das ferramentas principais do estudo de injeções compactas em espaços de Sobolev supre essa necessidade: o teorema de Rellich-Kondrachov (BREZIS, 2011; ADAMS; FOURNIER, 2003; ODEN; REDDY, 1976; MALÛ; ZIEMER, 1997; BRENNER; SCOTT, 2000).

Teorema 3.10 (Rellich-Kondrachov). *Seja $1 \leq p \leq +\infty$ e seja $s \geq 0$. Seja ainda $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto limitado que admite uma propriedade de extensão sp . Então, as seguintes injeções são compactas:*

- $sp \leq d \mapsto W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall 1 \leq q < p^*, \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{s}{d};$
- $sp > d \mapsto W^{s,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}).$

Demonstração. A prova pode ser encontrada nos trabalhos de MalÛ e Ziemer (1997), Brenner e Scott (2000), Adams e Fournier (2003) e Brezis (2011). □

Uma vez fundamentada a busca pela solução de problemas espectrais é possível nos focar em estabelecer ferramentas úteis para trabalhar com a aproximação dessas soluções. Neste

contexto, apresenta-se o Quociente (ou Coeficiente) de Rayleigh, que embasa os cálculos envolvendo as propriedades dos autovalores e autovetores, subsidiando, por exemplo, o desenvolvimento de estimadores de erro.

Definição 3.11 (Quociente de Rayleigh). *Seja a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ tal que $B : H_0^1(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega)$. Considerando que essa forma bilinear é simétrica, contínua e coerciva em $H_0^1(\Omega)$, o quociente de Rayleigh de uma função não nula $u \in H_0^1(\Omega)$ é definido como:*

$$R(u) = \frac{B(u, u)}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2} \quad (17)$$

3.2.4 FERRAMENTAS DE APROXIMAÇÃO

A primeira definição apresentada no contexto de ferramentas de aproximação é a de Partição da Unidade (PU). Esta estrutura topológica já figurava em trabalhos anteriores ao MPU, como em (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1977). No entanto, o conceito é apresentado sob uma nova óptica nos trabalhos iniciais do MPU (MELENK, 1995; BABUŠKA; MELENK, 1997; MELENK; BABUŠKA, 1996). Como o MEFG é embasado na estrutura matemática do MPU, apresenta-se aqui o conceito de PU com esse enfoque.

Definição 3.12 (Partição da Unidade (PU)). *Partição da Unidade é um espaço topológico de funções $\{\phi_i\}$ subordinadas a uma cobertura $\{\Omega_i\} \subset \mathbb{R}$ que possui as seguintes propriedades:*

- $\text{supp}(\phi_i) \subset \bar{\Omega}_i$, ou seja ϕ_i tem suporte compacto em Ω_i ;
- $\sum_i \phi_i = 1$ em Ω .

A seguir, apresenta-se a teoria de Stampacchia e Lax-Milgram, que ocupam uma posição central no estudo da aproximação por formulações variacionais garantindo a validade da aproximação com base nas propriedades dos espaços utilizados.

Primeiramente define-se uma forma bilinear contínua coerciva.

Definição 3.13. *Uma forma bilinear $B : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ é dita*

- *contínua: se existe uma constante C tal que*

$$|B(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H \quad (18)$$

- *coerciva: se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$B(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H \quad (19)$$

Com este conceito bem delineado, é possível apresentar o teorema de Stampacchia que subsidiará os resultados posteriores.

Teorema 3.14 (Stampacchia). *Seja $B(u, v)$ uma forma bilinear contínua coerciva em H . Seja ainda, um subconjunto não-vazio fechado e convexo $K \subset H$. Então, dado qualquer funcional linear $f : H \mapsto \mathbb{R}$, existe um único elemento de $u \in K$ tal que*

$$B(u, v) \geq f(u - v) \quad \forall v \in K \quad (20)$$

e ainda, $u \in K$ é tal que

$$\frac{1}{2}B(u, u) - f(u) = \min_{v \in K} \frac{1}{2} \{B(v, v) - f(v)\} \quad (21)$$

Demonstração. A prova desse teorema é um resultado clássico que se baseia nos resultados do teorema de ponto fixo de Banach e no teorema de representação de Riesz-Fréchet e pode ser encontrada em Brezis (2011) ou em Lions e Magenes (1973). \square

Teorema 3.15 (Lax-Milgram). *Seja $B(u, v)$ uma forma bilinear contínua coerciva em H . Então, dado qualquer funcional linear $f : H \mapsto \mathbb{R}$, existe um único elemento de $u \in H$ tal que*

$$B(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H \quad (22)$$

e ainda, $u \in H$ é tal que

$$\frac{1}{2}B(u, u) - f(u) = \min_{v \in H} \frac{1}{2} \{B(v, v) - f(v)\} \quad (23)$$

Demonstração. Utilizando o teorema 3.14 com $K = H$, tem-se que

$$\exists u \in H, \quad B(u, v) \geq f(u - v) \quad \forall v \in H \quad (24)$$

Portanto, é possível escrever

$$\exists u \in H, \quad B(u, v) - f(u - v) \geq 0 \quad \forall v \in H \quad (25)$$

Se a relação é válida para todo v , então vale para vt com qualquer $v \in H$ e $t \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$\exists u \in H, \quad B(u, vt) - f(u - vt) \geq 0 \quad \forall v \in H, \forall t \in \mathbb{R} \quad (26)$$

Das equações 25 e 26, segue-se que

$$\exists u \in H, \quad B(u, v) - f(v) = 0 \quad \forall v \in H, \forall t \in \mathbb{R} \quad (27)$$

E portanto está provada a equação 22. A demonstração da segunda parte do teorema 3.15 é direta, bastando fazer $K = H$. \square

O teorema de Lax-Milgram é uma simples e importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais parciais elípticas e está intrinsecamente ligado com o problema de minimização de funcionais. Um dos resultados principais desse teorema é que um problema variacional de valor de contorno que atende as condições do teorema (quanto aos espaços de funções e quanto as características da forma bilinear) é bem-posto, ou seja, possui solução única.

3.3 BASE MATEMÁTICA DA TEORIA DE APROXIMAÇÃO

Uma formulação precisa de Problemas Variacionais de Valor de Contorno envolve uma especificação cuidadosa da regularidade das funções de ponderação e da solução almejada (ODEN; DEMKOWICZ, 2010). Esse estudo implica na necessidade de caracterizar o problema estudado acerca de unicidade e existência de solução, assim como em relação a regularidade esperada dessa solução. Nesse contexto, serão apresentadas discussões pertinentes a aproximação na análise transiente (Domínio do tempo) e na análise modal (Domínio da frequência). Por fim, serão apresentadas as soluções analíticas da equação homogênea da onda unidimensional e bidimensional, com o intuito de embasar comparações das soluções numéricas.

3.3.1 ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado referente às variáveis de espaço e considerando a variável de tempo válida em \mathbb{R}_+ , é possível escrever a forma forte da equação da onda como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \quad (28)$$

Sujeita às condições no contorno Γ ,

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, \infty) \quad (29)$$

Discussões acerca da existência, unicidade e regularidade da solução para a forma forte do problema de propagação de ondas podem ser encontradas, por exemplo em (BREZIS, 2011) com resultados baseados em (YOSIDA, 1955). No entanto, como a equação será enfraquecida pela aplicação do método de Bubnov-Galerkin, é preciso se preocupar com as características, ou mesmo existência, de solução da formulação fraca do problema.

Dentre as alternativas para formular a forma fraca do problema, será desenvolvida uma família de problemas dimensionais em t , conforme Oden e Reddy (1976).

$$-\Delta u + u = f \quad (30)$$

Aplicando o método de Bubnov-Galerkin com a ponderação feita por uma função v independente de t e integrando em relação ao domínio físico, obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (31)$$

Onde,

$$\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad (32)$$

Para a forma fraca, descrita pela equação 31, há uma relaxação nas condições de regularidade da solução, nomeadamente, $u \in H^1(\bar{\Omega})$. Apesar disso, é possível garantir que toda solução da forma forte é também solução da forma fraca. Para tal, apresenta-se o teorema 3.16.

Teorema 3.16. *Seja $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e Ω de classe C^1 . Então,*

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \implies u \in H_0^1(\Omega) \quad (33)$$

Demonstração. Pode-se construir uma função $h(\xi) \in C^1(\mathbb{R})$ de forma que:

$$|h(\xi)| \leq |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (34)$$

Descrita por:

$$h(\xi) = \begin{cases} |\xi| \leq 1 \implies 0 \\ |\xi| > 1 \implies t \end{cases} \quad (35)$$

Com essa definição de $h(\xi)$, é possível construir uma sequência $u_n \in H^1(\Omega)$ definida como:

$$u_n = \frac{h(un)}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad \therefore u_n \longrightarrow u \quad (36)$$

Como $\text{supp}(u_n) \subset \{x \in \Omega / |u(x)| \geq \frac{1}{n}\}$, é possível concluir que $\text{supp}(u_n)$ é um conjunto compacto em Ω . Dessa forma, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ e portanto $u \in H_0^1(\Omega)$.

□

3.3.1.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DA FORMA FRACA

O teorema 3.16 garante que se a solução da forma forte também é solução da forma fraca. No entanto, é importante indagar se é possível encontrar solução da forma fraca e se, caso encontrada, esta é única. Dessa forma, enuncia-se teorema 3.17 que garante existência e unicidade de solução do problema descrito pela equação 31.

Teorema 3.17. *Se $f \in L^2(\Omega)$, então a equação 31 admite uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$ dada pela minimização do funcional*

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |v|^2) - \int_{\Omega} f v \quad (37)$$

Demonstração. Lembrando que a equação 31 é dada por:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (38)$$

Basta considerar a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ definida por

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \quad (39)$$

e o funcional linear Φ definido por

$$\Phi : v \mapsto \int_{\Omega} f v \quad (40)$$

Dessa forma, com $u, v \in H_0^1(\Omega)$, pelo teorema de Lax-Milgram garante-se a existência e unicidade da solução.

□

3.3.1.2 REGULARIDADE DA SOLUÇÃO DA FORMA FRACA

Uma vez garantido que é possível encontrar a solução, deve-se atentar às características de regularidade para podermos escolher apropriadamente os espaços de aproximação. O teorema 3.18 aborda essa questão.

Teorema 3.18. *Seja Ω um conjunto aberto de classe C^2 com contorno limitado Γ . Se $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazem*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (41)$$

então $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2} \quad (42)$$

onde C é uma constante que depende apenas de Ω .

Demonstração. A prova desse resultado pode ser obtida utilizando as ferramentas dos teoremas 3.14 e 3.15, sob a ótica de minimização. Para maiores detalhes, referencia-se (LIONS; MAGENES, 1973; ENR; GUERMOND, 2004; BREZIS, 2011). \square

O desenvolvimento apresentado nessa seção embasa a formulação variacional e garante a aproximação pelo método de Bubnov-Galerkin, respaldando assim a aplicação do MPU na análise transiente.

3.3.1.3 SOLUÇÃO APROXIMADA DA ANÁLISE TRANSIENTE

A aproximação feita pelo MEFG pode ser interpretada como uma extensão da abordagem clássica do MEF, sendo ambos os métodos casos particulares do Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade (MEFPU) (MELENK, 1995). Dessa forma, a solução aproximada do MEFG será descrita segundo a generalidade do MEFPU.

Para tal, seja Ω_i uma cobertura aberta de $\{\Omega_i\} \subset \Omega$ e seja uma PU $\{\phi_i\}$, conforme a definição 3.12. Com isso, tem-se o espaço de aproximação local $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$. A aproximação global é realizada então pelo espaço de aproximação do MEFPU, definido na equação 43.

$$V = \sum_i \phi_i V_i \quad (43)$$

Considere-se uma base de funções de aproximação $\{\phi_i\}_1^N$ que gera V , ou seja $V = \text{span}(\{\phi_i\}_1^N)$. Dessa forma, o problema variacional de valor de contorno pode ser reescrito na forma matricial aproximada como:

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad (44)$$

onde K é a matriz de rigidez, M é a matriz de massa e f é o vetor de forças, construídas da seguinte forma:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \quad (45)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j d\Omega \quad (46)$$

$$F_i = \int_{\Omega} f(t) \phi_i d\Omega \quad (47)$$

As matrizes K e M são simétricas por construção e são definidas positivas por serem matrizes de Gram (cujos elementos são gerados a partir de todos os possíveis produtos internos entre vetores de uma determinada base) em função da independência linear entre as funções da base de aproximação (BRENNER; SCOTT, 2000). Além disso, o problema espectral associado admite N autovalores reais e positivos (ENR; GUERMOND, 2004).

3.3.2 ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Considere-se o problema espectral relacionado com a propagação de ondas definido pela equação 48 sujeita a condições de Dirichlet homogêneas,

$$-\nabla u = \lambda u \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad (48)$$

Assim, aplicando o método de Bubnov-Galerkin, obtêm-se a forma fraca do problema espectral descrita na equação 49.

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \lambda \int_{\Omega} uv \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (49)$$

3.3.2.1 DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL

Pode-se garantir a existência um conjunto de funções $u_n \in L^2(\Omega)$ que forma uma base ortonormal desse espaço, conforme resultados relacionados com a decomposição de espaços de Hilbert (teorema 3.6). Existe ainda uma sequência ordenada de números reais positivos, λ_n , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \quad (50)$$

Essas propriedades são apresentadas formalmente no teorema 3.19.

Teorema 3.19 (Decomposição Espectral). *Seja Ω um domínio fechado em \mathbb{R}^n . Então, a forma fraca do problema espectral descrita na equação 49 admite infinitos pares $\{\lambda_n, u_n\}$ de solução tal que*

- $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$
- $u_n \in L^2(\Omega)$ é uma base ortonormal de Hilbert para $L^2(\Omega)$

Demonstração. Define-se o operador $G : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega)$ de forma que $f \in L^2(\Omega)$ é uma solução fraca da equação $-\Delta u = f$ com condições de Dirichlet homogêneas. Assim,

$$\int_{\Omega} \nabla(Gf) \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (51)$$

Como Ω é limitado, pelo teorema de Rellich-Kondrachov $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é uma injeção compacta (teorema 3.10). Dessa forma, o operador G é compacto. Adicionalmente, G é auto-adjunto pois

$$\int_{\Omega} Gf \cdot g = \int_{\Omega} \nabla(Gf) \nabla(Gg) = \int_{\Omega} f \cdot Gg \quad (52)$$

e positivo definido pois

$$\int_{\Omega} Gf \cdot f = \int_{\Omega} \nabla(Gf) \nabla(Gf) = |Gf|^2 \quad (53)$$

Considerando as propriedades do operador G , segue da teoria de operadores compactos (teorema 3.9), auto-adjuntos (eq. 52) e positivos definidos (53), que existe uma base ortonormal de autofunções $u_n \in L^2(\Omega)$ e autovalores μ_n tal que:

$$Gu_n = \mu_n u_n \quad (54)$$

Adotando-se $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ na equação 54 tem-se,

$$u_n = G(\lambda_n u_n) \quad (55)$$

Finalmente, das equações 51 e 55 é possível escrever,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v = \lambda_n \int_{\Omega} u_n v \quad u_n \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (56)$$

o que implica que $\{\lambda_n, u_n\}$ satisfaz a equação 49. \square

Das ideias da decomposição espectral resultam uma propriedade importante do operador Laplaciano, expressa no corolário 3.20.

Corolário 3.20. *O operador Laplaciano é ilimitado.*

Demonstração. A prova desse corolário é direta, pois dada a sequência de autofunções de Δ , tem-se

$$\|\Delta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta u_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \quad \therefore \|\Delta\| = \infty \quad (57)$$

\square

3.3.2.2 SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA ESPECTRAL

O problema espectral (equação 49) pode ser resolvido analiticamente apenas em casos particulares cujo domínio Ω possui uma forma consideravelmente simples. Para a maior parte dos casos deve-se adotar uma solução aproximada para os autovalores e autofunções. Uma alternativa clássica é o Método dos Elementos Finitos.

A aproximação será construída estendendo a abordagem clássica do MEF para o MEF_G, herdando as propriedades de aproximação do Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade (MEFPU) (MELENK, 1995). Para tal, seja Ω_i uma cobertura aberta de $\{\Omega_i\} \subset \Omega$ e seja uma PU $\{\phi_i\}$, conforme a definição 3.12. Com isso, tem-se o espaço de aproximação local $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$. A aproximação global é realizada então pelo espaço de aproximação do MEFPU, definido na equação 58.

$$V = \sum_i \phi_i V_i \quad (58)$$

O problema espectral aproximado então se resume a procurar $\bar{u} \in V$ e $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla v_h = \bar{\lambda} \int_{\Omega} \bar{u} v_h \quad \forall v_h \in V \quad (59)$$

Considere-se uma base de funções de aproximação $\{\phi_i\}_1^N$ que gera V , ou seja $V = \text{span}(\{\phi_i\}_1^N)$, e considere-se ainda $\Phi \in \mathbb{R}^N$ vetor com as coordenadas relativas a essa base. O problema descrito pela equação 59 se equivale então a buscar Φ e $\bar{\lambda}$ tal que:

$$K\Phi = \bar{\lambda}M\Phi \quad (60)$$

onde K é a matriz de rigidez e M é a matriz de massa, construídas das seguinte forma:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j d\Omega \quad (61)$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \quad (62)$$

As matrizes K e M são simétricas por construção e são definidas positivas por serem matrizes de Gram em função da independência linear entre as funções da base de aproximação (BRENNER; SCOTT, 2000). Além disso, o problema espectral associado admite N autovalores reais e positivos (ENR; GUERMOND, 2004).

3.3.2.3 APLICAÇÃO DA TEORIA DE RAYLEIGH

O quociente de Rayleigh (definição 3.11 - pág. 46) permite escrever estimativas para os autovalores do problema espectral. O teorema apresenta conclusões acerca do primeiro e do último autovalores do espectro do problema espectral de dimensão finita, resultado da aproximação.

Teorema 3.21. *Seja V^h um espaço de Hilbert de dimensão n o quociente de Rayleigh definido conforme 3.11. Sejam os autovalores crescentemente ordenados $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Então,*

$$(i) \quad \lambda_1 = \min (R(v)) \quad (63)$$

$$(ii) \quad \lambda_n = \max (R(v)) \quad (64)$$

Demonstração. Aplicando o quociente em u_1 , tem-se

$$R(u_1) = \frac{B(u_1, u_1)}{\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2} = \lambda_1 \quad (65)$$

Naturalmente $R(u_1) \geq \min_{v \in H_0^1(\Omega)} R(v)$. No entanto, é possível decompor $v \in V^h(\Omega)$ em função da base $\{u_n\}$. Ou seja,

$$v = \sum_{i=1}^n v_i u_i \quad (66)$$

$$\therefore R(v) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^2} \geq \lambda_1 \quad (67)$$

Dessa forma, $\lambda_1 = R(u_1) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} R(v)$ e (i) está provada. A prova de (ii) é análoga.

□

Generalizando a ideia do teorema 3.21, os autovalores intermediários $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_{n-1}$ são pontos de sela e podem ser caracterizados através do princípio de max-min de Courant e Hilbert (1962) ou pelo princípio de min-max de Becker *et al.* (1983).

No princípio min-max o quociente de Rayleigh é maximizado sobre um subespaço de dimensão $1 < s < n$ e então o mínimo valor do quociente sobre todos os espaços H^s é o autovalor λ_s . Formaliza-se esse conceito no teorema 3.22.

Teorema 3.22 (Princípio de max-min). *Seja V^h um espaço de Hilbert de dimensão n o quociente de Rayleigh definido conforme 3.11. Sejam os autovalores crescentemente ordenados $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Se H^s denota o conjunto dos subespaços de H^h de dimensão s , então*

$$\lambda_s = \min_{S \in H^s} \max_{v \in S} (R(v)) \quad (68)$$

Demonstração. Seja S o espaço gerado pelos primeiros s autovetores $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$. Assim, para todo $v \in S$, tem-se $v = \sum_{i=1}^s v_i u_i$. Portanto,

$$R(v) = \frac{\sum_{i=1}^s \lambda_i v_i^2}{\sum_{i=1}^s v_i^2} \leq \lambda_s \implies \lambda_s \geq \min_{S \in H^s} \max_{v \in S} (R(v)) \quad (69)$$

Por outro lado, é possível mostrar que existe $v \in (S \in H^s) \cap (S^* \in H^{s-1})$ e portanto é possível escrever,

$$v = \sum_{i=s}^n v_i u_i \implies R(v) \geq \lambda_s \quad (70)$$

Consequentemente, $\max_{v \in S} (R(v)) \geq \lambda_s$. Tem-se então que,

$$\lambda_s \leq \min_{S \in H^s} \max_{v \in S} (R(v)) \quad (71)$$

□

3.3.2.4 ANÁLISE DE ERRO

Para a construção de estimadores de erro para a aproximação do problema espectral é preciso definir uma medida σ_m relacionada com a qualidade da aproximação do m -ésimo autovalor.

Definição 3.23. *Seja o operador elíptico $\Pi_h : H_0^1(\Omega)$ tal que $B(\Pi_h u - u, v_h) = 0, \forall v_h \in V$. Seja ainda, E_m a esfera unitária do espaço $V_m = \text{gerado } \{u_1, \dots, u_m\}$. Define-se então,*

$$\sigma_m = \inf_{v \in E_m} \|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \quad (72)$$

Com σ_m é possível limitar a aproximação dos autovalores, como expressa o teorema 3.24.

Teorema 3.24. *Seja $1 \leq m \leq n$. Se $\sigma_m \neq 0$, então*

$$\lambda_m \leq \bar{\lambda}_m \leq \lambda_m \sigma_m^{-2} \quad (73)$$

Demonstração. $\lambda_m \leq \bar{\lambda}_m$ é uma consequência princípio de max-min (teorema 3.22). A segunda

desigualdade pode ser demonstrada adaptando a prova do teorema 3.22 considerando o espaço $\Pi_h H^m$ no lugar de H^m . Nomeadamente, tem-se

$$\bar{\lambda}_m \leq \max_{v_h \in \Pi_h H^m} \frac{B(v_h, v_h)}{\|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2} = \max_{v \in H^m} \frac{B(\Pi_h v, \Pi_h v)}{\|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2} \quad (74)$$

Como,

$$\bar{\lambda}_m \leq \max_{v \in H^m} \frac{B(v, v)}{\|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \max_{v \in H^m} R(v) \max_{v \in H^m} \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2} \quad (75)$$

Pela definição 3.23, tem-se que $\sigma_m = \inf_{v \in E_m} \|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}$ e, utilizando o fato que $\lambda_m = \max_{v \in H^m} (R(v))$, pelo teorema 3.21, é possível escrever $\bar{\lambda}_m \leq \lambda_m \sigma_m^{-2}$, o que finaliza a demonstração.

□

O parâmetro σ_m^2 pode ser limitado inferiormente, como exposto no teorema 3.25.

Teorema 3.25. *Se $1 \leq m \leq n$, então existe uma constante C_1 , dependente de m e independente da malha, tal que:*

$$\sigma_m^2 \geq 1 - C_1 \left(\max_{v \in S_m} \|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \quad (76)$$

Demonstração. Seja $v \in S_m$, com as coordenadas $\{v_i\}_1^m$ na base $\{u_i\}_1^m$. Nota-se que $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{1 \leq i \leq m} v_i^2 = 1$. Tem-se ainda que a norma de $\Pi_h v$ é limitada inferiormente em $L^2(\Omega)$ da seguinte forma:

$$\|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(v, v - \Pi_h v)_{L^2(\Omega)} \quad (77)$$

Dada a simetria de $B(\cdot, \cdot)$ e utilizando a definição de $\Pi_h v$, tem-se

$$(v, v - \Pi_h v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{1 \leq i \leq m} v_i (u_i, v - \Pi_h v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{1 \leq i \leq m} \frac{v_i}{\lambda_i} B(u_i, v - \Pi_h v) \quad (78)$$

$$\therefore (v, v - \Pi_h v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{1 \leq i \leq m} \frac{v_i}{\lambda_i} B(u_i - \Pi_h u_i, v - \Pi_h v) \quad (79)$$

Relaxando a igualdade, é possível escrever

$$(v, v - \Pi_h v)_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\|B\|}{\lambda_1} \|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \|u_i - \Pi_h u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \quad (80)$$

$$(v, v - \Pi_h v)_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{m} \frac{\|B\|}{\lambda_1} \|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \sup_{w \in S_m} \|w - \Pi_h w\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (81)$$

$$(v, v - \Pi_h v)_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{m} \frac{\|B\|}{\lambda_1} \sup_{w \in S_m} \|w - \Pi_h w\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (82)$$

Por fim, aplicando equação 82 na equação 77, escreve-se:

$$\|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\sqrt{m} \frac{\|B\|}{\lambda_1} \sup_{w \in S_m} \|w - \Pi_h w\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (83)$$

Adotando $C_1 = 2\sqrt{m} \frac{\|B\|}{\lambda_1}$ e lembrando da definição de σ , obtêm-se a relação desejada. \square

Com a ferramentas definidas nos resultados anteriores é possível estabelecer uma medida do erro relativo estimado na aproximação dos autovalores. Para tal, apresenta-se o teorema 3.26.

Teorema 3.26. *Considere-se a construção de sequência de espaços de aproximação $\{V_i\}$ que resulta na seguinte propriedade de aproximação:*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\inf_{v_i \in V_i} \|v - v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \right) = 0 \quad (84)$$

Então, $\forall m \geq 1, \exists i_{min}$ tal que $\forall i \geq i_{min}$:

$$0 \leq \frac{\bar{\lambda}_m - \lambda_m}{\lambda_m} \leq 2C_1 \max_{v \in S_m} \inf_{v_i \in V_i} \|v - v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (85)$$

Demonstração. Para um dado $m \geq 1$, S_m é compacto e portanto existe $v_0 \in S_m$ tal que

$$\sup_{v \in S_m} \|v - \Pi_h v\|_{H_0^1}^2 = \|v_0 - \Pi_h v_0\|_{H_0^1}^2 \quad (86)$$

Recordando um resultado importante de estimadores de erro (ENR; GUERMOND, 2004, Teorema 2.24), é possível escrever:

$$\|v_0 - \Pi_h v_0\|_{H_0^1}^2 \leq \sqrt{\left(\frac{\|B\|}{\alpha} \right)} \inf_{v_i \in V_i} \|v - v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (87)$$

Como m é fixo na condição da equação 84, é possível garantir que existe i_{min} tal que:

$$C_1 \|v_0 - \Pi_h v_0\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{1}{2} \quad (88)$$

Observando que $1 + 2x \geq \frac{1}{1-x}$ para todo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, é possível utilizar o teorema 3.25 para

escrever:

$$1 + 2C_1 \|v_0 - \Pi_h v_0\|_{H_0^1}^2 = 1 + 2C_1 \sup_{v \in S_m} \|v - \Pi_h v\|_{H_0^1}^2 \geq \sigma_m^{-2} \quad (89)$$

Utilizando a expressão do teorema 3.24 na inequação 89 e dividindo por λ_m obtêm-se a expressão desejada. \square

A abordagem adotada neste capítulo fez uma descrição mais geral dos métodos baseados no Método de Bubnov-Galerkin, sob um ponto de vista mais matemático. As ferramentas fornecidas pela Análise Funcional permitem caracterizar adequadamente as propriedades de aproximação pertinentes às aplicações de interesse.

Em seguida, o foco do desenvolvimento teórico será voltado a construção dos espaços de aproximação utilizando o MEFG, sob a ótica do MEFPU, destacando as propriedades da abordagem enriquecida.

Por fim, observações teóricas feitas ao longo deste capítulo subsidiam a análise dos resultados do exemplos numéricos apresentados no Capítulo 6.

4 FUNDAMENTOS DO MEFG EM ANÁLISE DINÂMICA

Neste capítulo é apresentado o embasamento da aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizado no contexto da Análise Dinâmica. Primeiramente são expostos os conceitos relativos à construção do espaço de aproximação, respaldando-se na teoria proveniente do Método do Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU).

Em seguida, é descrito o processo de escolha e construção da Partição da Unidade (PU). São explanadas as escolhas de PU utilizadas no contexto deste trabalho, apresentando-se as respectivas fórmulas e propriedades pertinentes às análises posteriores.

O enriquecimento trigonométrico é então apresentado, lembrando-se da proposição inicial de Arndt (2009), passando pela modificação utilizada no trabalho de Torii (2012) e chegando ao formato utilizado no presente estudo.

Por fim, elucida-se a metodologia adotada para realizar a extensão das aproximações, anteriormente construídas para os casos unidimensionais, para problemas bidimensionais.

4.1 CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO

Os resultados do capítulo de referencial teórico garantem, de acordo com a teoria matemática do MEFPU, que os espaços de aproximação locais V_i gerados pela base de funções v_i apresentam as propriedades de aproximação que serão em seguida descritas.

Seja u a função a ser aproximada e $v_i \in V_i$, os espaços de aproximação locais V_i satisfazem as seguintes condições

$$\|u - v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_1(i) \quad (90)$$

e

$$\|\nabla(u - v_i)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_2(i) \quad (91)$$

onde $\varepsilon_1(i)$ e $\varepsilon_2(i)$ são valores dependentes da i -ésima cobertura que limitam $(u - v_i)$ e suas derivadas segundo uma norma conveniente. Dessa forma, a função u_h que aproxima u satisfaz,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\infty \sqrt{M \left(\sum_i \varepsilon_1^2(i) \right)} \quad (92)$$

e

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L(\Omega)^2} \leq \sqrt{2M \left(\sum_i \left(\frac{C_g}{\text{diam}(\Omega_i)} \right)^2 \varepsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \varepsilon_2^2(i) \right)} \quad (93)$$

Nas equações 92 e 93, M está relacionado com o número de sobreposições de coberturas sobre um mesmo ponto no domínio Ω . Nas mesmas expressões, C_∞ e C_g são constantes. Por fim, $\text{diam}(\Omega_i)$ corresponde ao diâmetro da cobertura definida pelas funções de aproximação.

Portanto, com os conceitos pertinentes do MEFPU bem embasados, é possível escrever que a solução aproximada do MEFG é composta da soma de duas parcelas:

$$u_h^e = u_{MEF} + u_{ENR} \quad (94)$$

onde u_{MEF} corresponde a parcela descrita pelas funções de aproximação clássicas do MEF e u_{ENR} corresponde a aproximação feita pelas funções de enriquecimento que visam incorporar aspectos particulares do problema estudado.

4.2 PARTIÇÃO DA UNIDADE

As funções de Partição da Unidade (PU) formam a base de aproximação a ser enriquecida e portanto influenciam diretamente as características do espaço de aproximação enriquecido. Como exposto anteriormente, Garcia *et al.* (2010) propuseram relacionar a regularidade do espaço de aproximação com a acurácia do MEFG em análise dinâmica que, como mostrado no Teorema I de Duarte e Oden (1996a), é limitada pela regularidade da PU. Ou seja, é possível escrever:

$$\phi \in C^l, \psi \in C^m \implies \phi\psi \in C^{\min(l,m)} \quad (95)$$

Dessa forma, justifica-se um estudo voltado ao processo de escolha e construção da Partição da Unidade orientado a aplicação do MEFG em Análise Dinâmica.

É possível construir inúmeros tipos de PU utilizando, por exemplo: Polinômios de Lagrange, Polinômios de Legendre, Polinômios de Lobatto, Polinômios Racionais (Funções de Shepard), NURBS (*Non Uniform Rational Basis Spline*), B-Splines, Wavelets, Funções Trigonométricas e até mesmo Funções de Heaviside. Dentre as alternativas, no presente trabalho

foram escolhidas PU construídas com três tipos de funções, visando explorar os aspectos do enriquecimento, e com a formação baseada em:

- Polinômios de Lagrange
- Polinômios Racionais (Funções de Shepard)
- Funções Trigonométricas

A escolha dos Polinômios de Lagrange se deve a sua consagração nas implementações do MEF e simplicidade de construção. PU's Lagrangeanas lineares foram utilizadas pelos trabalhos de Arndt (2009) e Torii (2012) como base para o MEFG trigonométrico e portanto serão também aqui consideradas.

A utilização de Funções de Shepard, que são baseadas em Polinômios Racionais, para a construção de espaços de aproximação tem sua origem nos Métodos Sem Malha e tem sido base de recentes e promissoras aplicações no MEFG- C^k , como no trabalho de Freitas (2015). A técnica de construção desse tipo de PU permite escolher a regularidade (k) das funções geradas e portanto, com essa propriedade e dada sua relevância, resolveu-se abranger esse tipo de PU.

Buscando construções de PU com alta regularidade, foram empregadas também funções trigonométricas. Assim, como já apontado por Torii (2012), é possível construir uma PU com duas funções trigonométricas baseando-se na relação trigonométrica fundamental.

A seguir são descritos os processos de construção das funções, caracterizando-as quanto a sua regularidade e destacando propriedades relevantes.

4.2.1 PU DEFINIDA A PARTIR DE POLINÔMIOS DE LAGRANGE

Os polinômios de Lagrange de grau k são definidos da seguinte forma:

Definição 4.1 (Polinômios de Lagrange). *Seja $k \geq 1$ e seja $\{s_1, s_2, \dots, s_{k+1}\}$ um conjunto de $(k+1)$ números distintos. Os polinômios de Lagrange $\{L_1^k, \dots, L_{k+1}^k\}$ associados com os nós $\{s_1, s_2, \dots, s_{k+1}\}$ são definidos como:*

$$L_i^k(\xi) = \frac{\prod_{j \neq i} (\xi - s_j)}{\prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} \quad (96)$$

Os polinômios de Lagrange formam uma Partição da Unidade em $\Omega_e : \xi \in [-1, +1]$ e possuem ainda a propriedade δ , ou seja, $L_i^k(s_j) = \delta_{ij}$ para $0 \leq i$ e $j \leq k$. Adicionalmente, é importante ressaltar que $L_i^k \in C^{k-1}$.

No escopo deste trabalho foram considerados os polinômios de Lagrange até $k = 3$ para a aproximação por MEF e apenas o polinômio lagrangeano linear ($k = 1$) como base para o enriquecimento do MEEG. A seguir, as equações explicitam as expressões correspondentes e a figura 3 ilustra o comportamento dessas funções.

Polinômios Lagrangeanos Lineares:

$$\mathbf{L}_1^1(\xi) = \frac{(1 - \xi)}{2} \quad (97)$$

$$\mathbf{L}_2^1(\xi) = \frac{(1 + \xi)}{2} \quad (98)$$

Polinômios Lagrangeanos Quadráticos:

$$\mathbf{L}_1^2(\xi) = -\frac{\xi(1 - \xi)}{2} \quad (99)$$

$$\mathbf{L}_2^2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (100)$$

$$\mathbf{L}_3^2(\xi) = \frac{\xi(1 + \xi)}{2} \quad (101)$$

Polinômios Lagrangeanos Cúbicos:

$$\mathbf{L}_1^3(\xi) = \frac{(1 - \xi)(3\xi - 2)(3\xi + 2)}{10} \quad (102)$$

$$\mathbf{L}_2^3(\xi) = -\frac{9(1 + \xi)(3\xi - 2)(1 - \xi)}{20} \quad (103)$$

$$\mathbf{L}_3^3(\xi) = \frac{9(1 + \xi)(3\xi + 2)(1 - \xi)}{20} \quad (104)$$

$$\mathbf{L}_4^3(\xi) = \frac{(1 + \xi)(3\xi + 2)(3\xi - 2)}{10} \quad (105)$$

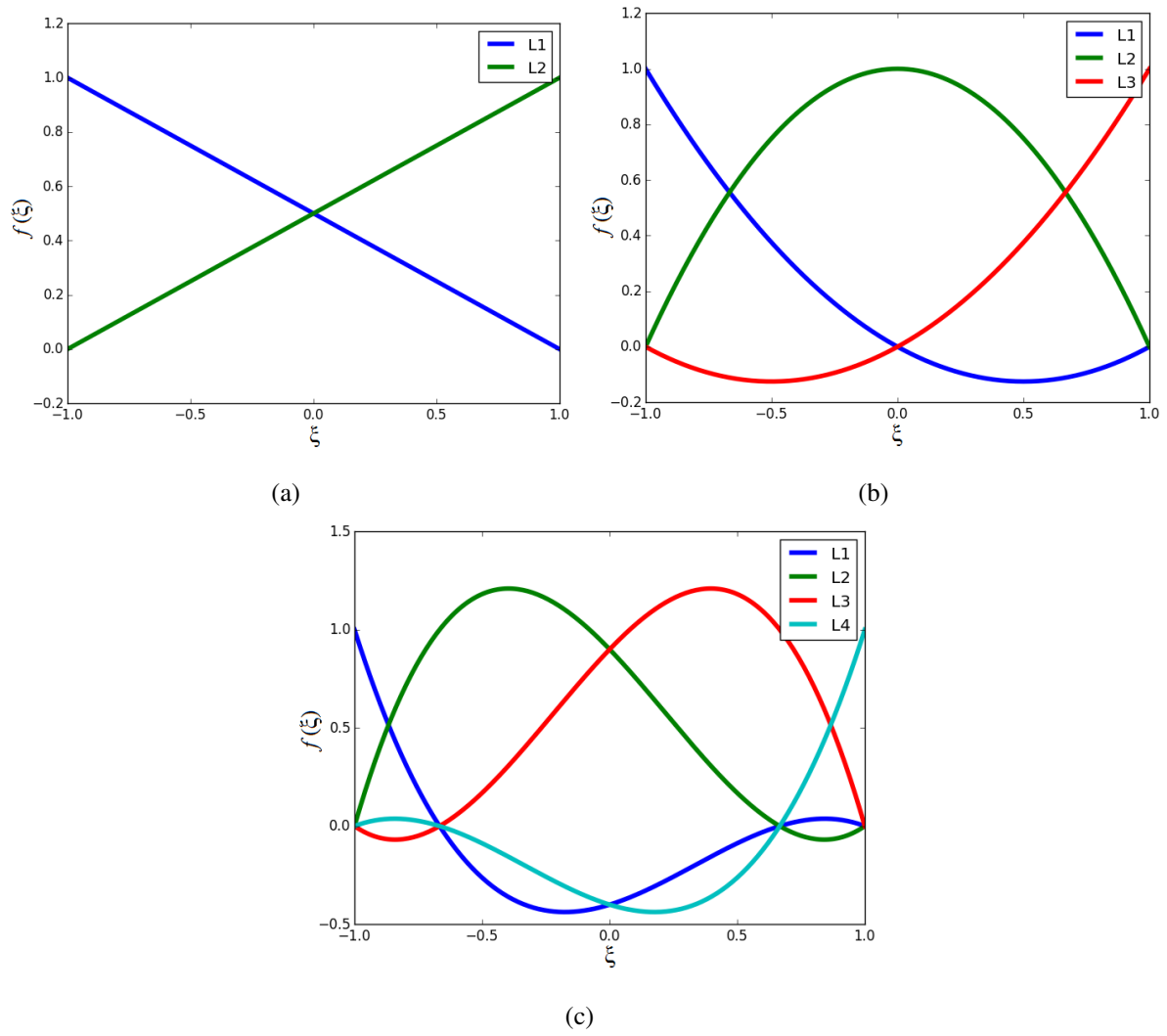


Figura 3- Polinômios de Lagrange - (a): $k = 1$; (b): $k = 2$; (c): $k = 3$.

4.2.2 PU DEFINIDA A PARTIR DE POLINÔMIOS RACIONAIS

A funções de Shepard utilizadas nesse trabalho são derivadas de duas funções peso W_1, W_2 construídas por polinômios racionais e definidas pelas equações 106 e 107:

$$W_1(\xi) = \left[1 - \left(\frac{1 + \xi}{h_\alpha} \right)^2 \right]^n \quad (106)$$

$$W_2(\xi) = \left[1 - \left(\frac{1 - \xi}{h_\alpha} \right)^2 \right]^n \quad (107)$$

Nas equações 106 e 107 h_α corresponde a $diam(\Omega_i)$, ou seja, o diâmetro da cobertura definida pelas funções de aproximação. No caso do elemento mestre adotado nesse trabalho

com $\xi \in [-1, +1]$, tem-se $h_\alpha = 2$. O comportamento destes polinômios racionais é ilustrado na figura 4.

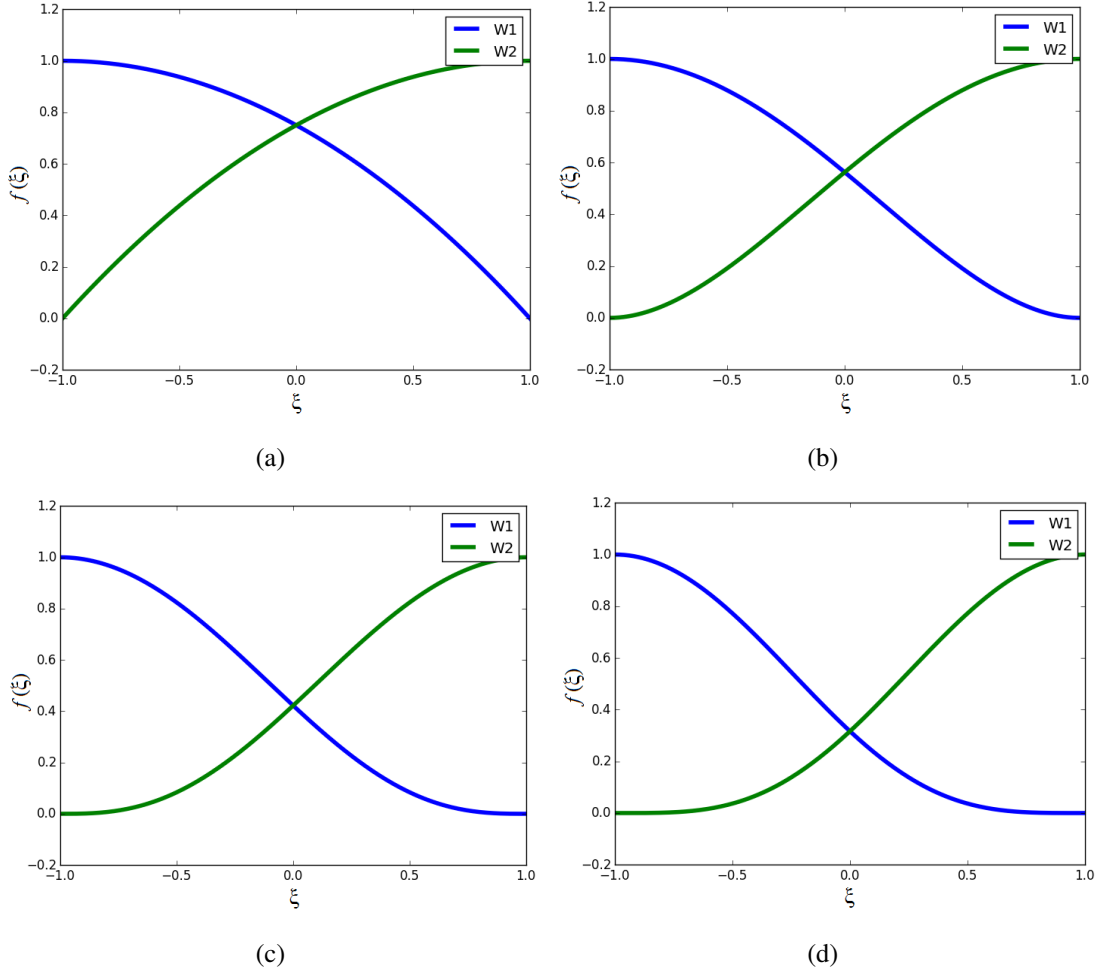


Figura 4- Funções Peso C^k , $h_\alpha = 2$ - (a): $n = 1$; (b): $n = 2$; (c): $n = 3$; (d): $n = 4$.

As funções de Shepard são construídas de forma geral a partir de M funções peso como:

$$S_i(\xi) = \frac{W_i(\xi)}{\sum_{m=0}^M W_m(\xi)} \quad i = \{1, 2, \dots, M\} \quad (108)$$

Para a construção de uma PU unidimensional baseada em funções de Shepard, adota-se $M = 2$. Assim, considerando o caso desta aplicação unidimensional de malha uniforme, h_α no domínio do elemento mestre correspondente $h_\alpha = 1 - (-1) = 2$. As funções descritas nas equações 109 e 110 possuem suporte compacto no domínio do $\Omega_e : (-1, +1)$ do elemento. Pode-se mostrar ainda que essas funções possuem regularidade de ordem n , caso n seja par, ou

de ordem $n - 1$ se n for ímpar. Tais propriedades permitem escrever uma partição da unidade com regularidade C^k , conforme exposto a seguir nas equações 109 e 110.

$$S_1(\xi) = \frac{W_1(\xi)}{(W_1(\xi) + W_2(\xi))} \quad (109)$$

$$S_2(\xi) = \frac{W_2(\xi)}{(W_1(\xi) + W_2(\xi))} \quad (110)$$

Na figura 5 apresentam-se as partições da unidade C^k para os casos $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

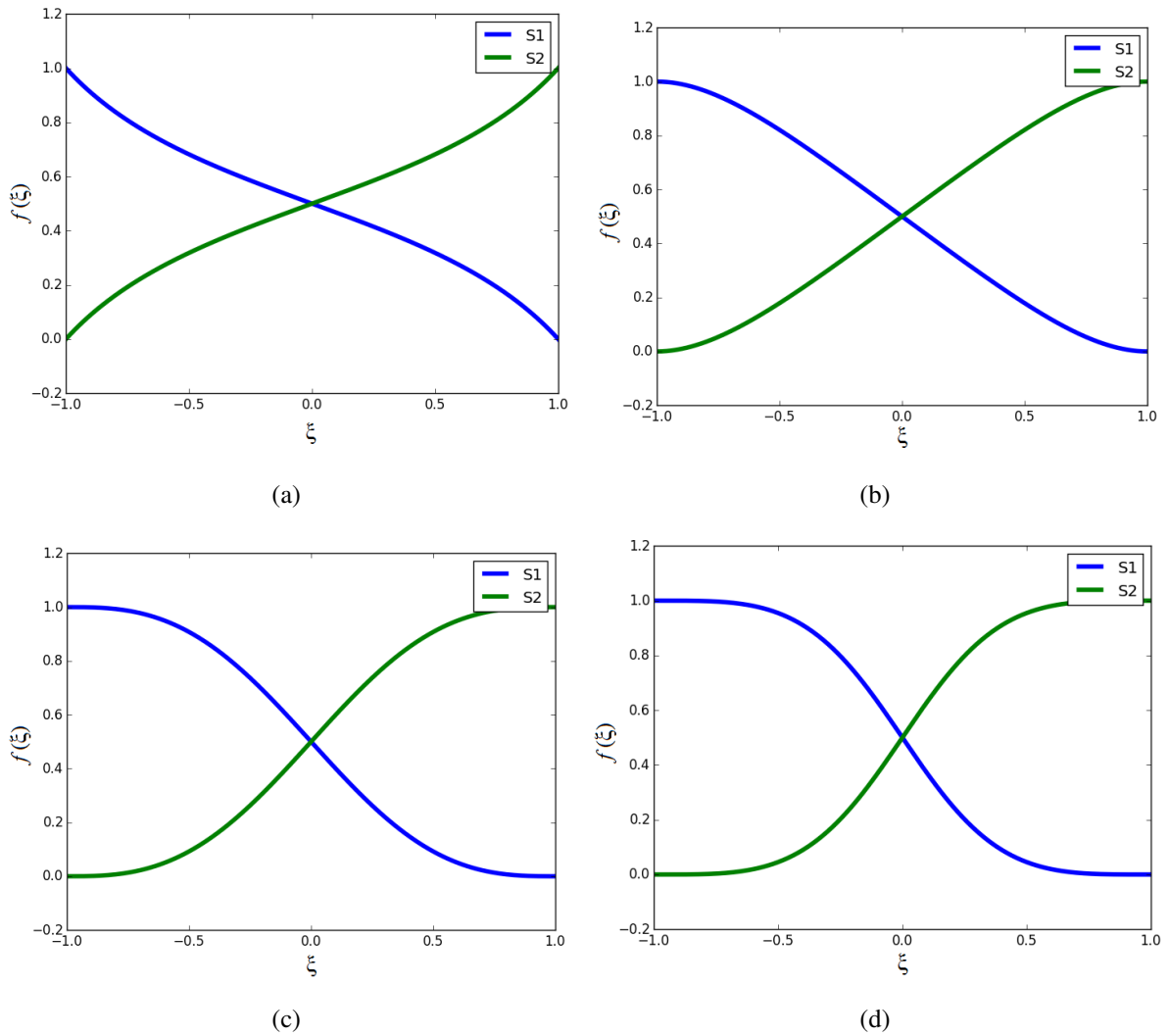


Figura 5- Partição da Unidade C^k - (a): $n = 1$; (b): $n = 2$; (c): $n = 3$; (d): $n = 4$.

4.2.3 PU DEFINIDA A PARTIR DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A construção da Partição da Unidade Trigonométrica utilizada neste trabalho baseia-se na Relação Trigonométrica Fundamental, de forma análoga ao apresentado por Torii (2012) e

utilizado em Weinhardt *et al.* (2015b) e Weinhardt *et al.* (2015a), obtendo uma PU com regularidade C^∞ . A Relação Trigonométrica Fundamental é dada por:

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (111)$$

Tomando-se $x = \frac{(\xi+1)}{4}\pi$ tem-se uma PU trigonométrica, como exposto nas equações 112 e 113 e ilustrado na figura 6, é possível escrever para o domínio $\Omega_e : (-1, +1)$:

$$T_1(\xi) = \cos^2\left(\frac{(\xi+1)}{4}\pi\right) \quad (112)$$

$$T_2(\xi) = \text{sen}^2\left(\frac{(\xi+1)}{4}\pi\right) \quad (113)$$

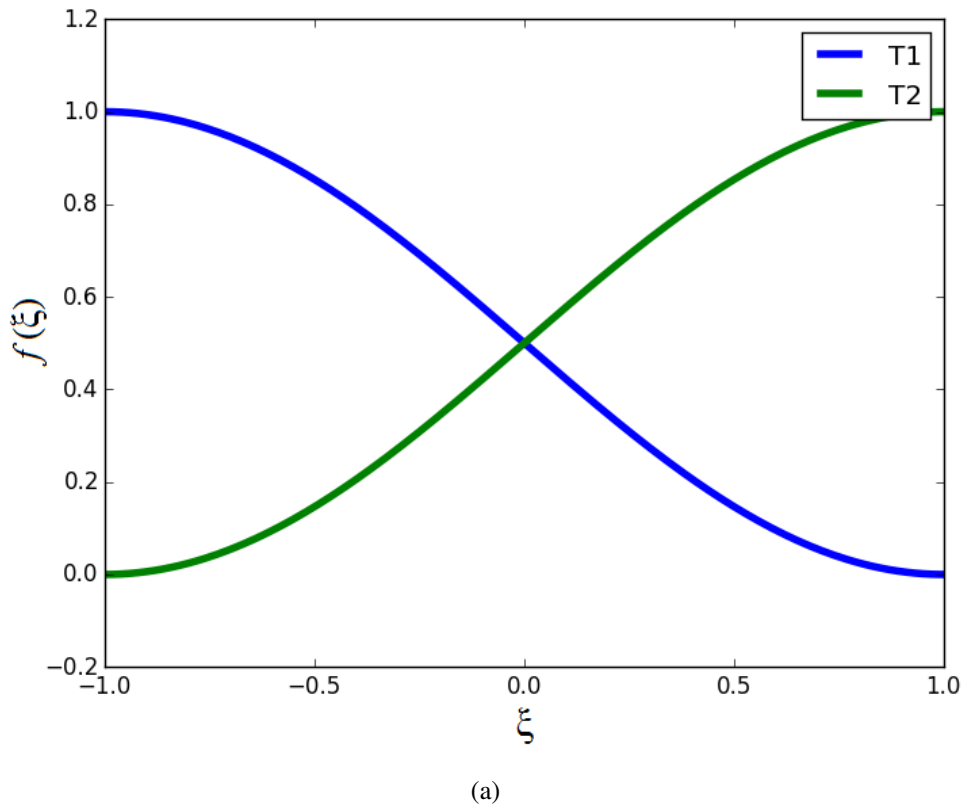


Figura 6- Partição da Unidade Trigonométrica.

4.3 ENRIQUECIMENTO TRIGONOMÉTRICO

Para o problema de vibração livre, um conjunto de funções de enriquecimento foi proposto por Arndt (2009) para o problema de análise dinâmica com o MEFG. Esse grupo de

funções consiste na construção de um par de nuvens, uma senoidal e uma cossenoidal, subordinadas a cobertura do nó enriquecido. Essas nuvens são escritas no domínio do elemento como dois pares de funções seno e cosseno (Equações 114, 115, 117 e 118). O domínio elementar é considerado para $\xi \in [0, +1]$.

Nuvem senoidal:

$$\gamma_{1j} = \text{sen}(\beta_j L_e \xi) \quad (114)$$

$$\gamma_{2j} = \text{sen}(\beta_j L_e (\xi - 1)) \quad (115)$$

Nuvem cossenoidal:

$$\varphi_{1j} = \cos(\beta_j L_e \xi) - 1 \quad (117)$$

$$\varphi_{2j} = \cos(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1 \quad (118)$$

onde L_e é o comprimento do elemento e $\beta_j = j\alpha\pi$ é um parâmetro de enriquecimento hierárquico proposto por Arndt (2009) para j níveis de funções e α é um parâmetro ajustável que pode envolver o comprimento e os parâmetros do material (massa específica e módulo de elasticidade). Dessa forma, utilizando a PU Lagrangeana Linear, a base de aproximação é escrita para $j = 1, 2, \dots$ níveis de enriquecimento como:

$$\phi_1 = 1 - \xi \quad (120)$$

$$\phi_2 = \xi \quad (121)$$

$$\phi_{4j-1} = (1 - \xi) \cdot \text{sen}(\beta_j L_e \xi) \quad (122)$$

$$\phi_{4j} = \xi \cdot \text{sen}(\beta_j L_e (\xi - 1)) \quad (123)$$

$$\phi_{4j+1} = (1 - \xi) \cdot [\cos(\beta_j L_e \xi) - 1] \quad (124)$$

$$\phi_{4j+2} = (\xi) \cdot [\cos(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1] \quad (125)$$

Para $j = 0$, a base de funções corresponderia ao MEF linear. Na figura 7 é representado o conjunto de funções para $j = 1$, $L_e = 1$ e $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

Posteriormente Torii (2012) propôs uma modificação sutil das funções de enriquecimento trigonométrico, removendo a influência do comprimento do elemento (L_e), desvinculando o parâmetro β_j dos parâmetros do material (peso específico e módulo de elasticidade) e reescrevendo para o domínio elementar $\xi \in [-1, +1]$. Essa modificação resulta na seguinte base de aproximação para $j = 1, 2, \dots$ níveis de enriquecimento:

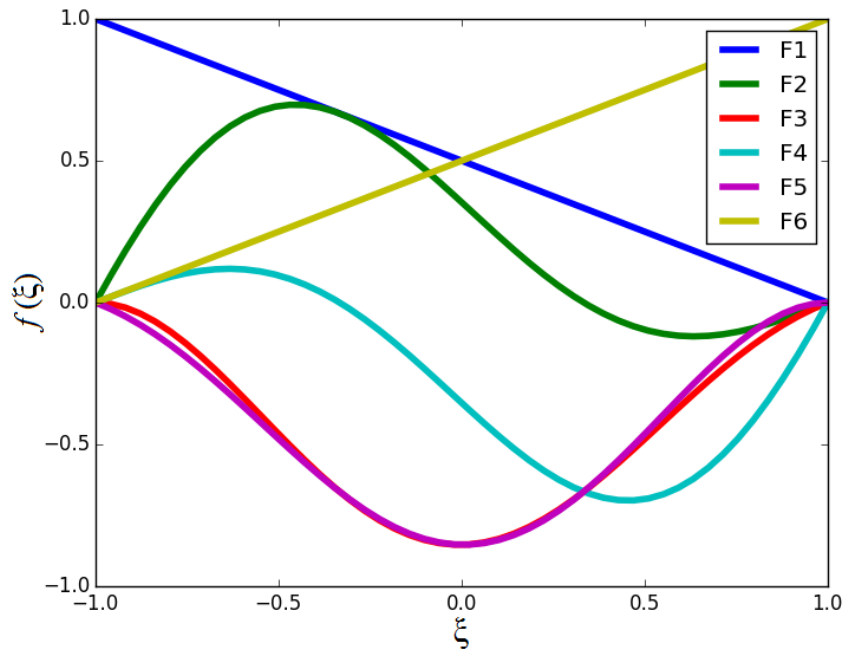


Figura 7- Base de funções de aproximação enriquecida - $j = 1$, $L_e = 1$ e $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

$$\phi_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (126)$$

$$\phi_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (127)$$

$$\phi_{4j-1} = \frac{1 - \xi}{2} \sin\left(\beta_j \frac{1 + \xi}{2}\right) \quad (128)$$

$$\phi_{4j} = \frac{1 + \xi}{2} \sin\left(\beta_j \frac{\xi - 1}{2}\right) \quad (129)$$

$$\phi_{4j+1} = \frac{1 - \xi}{2} \left[\cos\left(\beta_j \frac{1 + \xi}{2}\right) - 1 \right] \quad (130)$$

$$\phi_{4j+2} = \frac{1 + \xi}{2} \left[\cos\left(\beta_j \frac{\xi - 1}{2}\right) - 1 \right] \quad (131)$$

Para $j = 0$, a base de funções corresponde ao MEF linear. Na figura 8 é representado o conjunto de funções para $j = 1$ e $\beta = 2\pi$.

Para o presente trabalho as funções de enriquecimento trigonométrico foram reescritas baseando-se nas abordagens de Arndt (2009) e Torii (2012), focando nos efeitos da escolha do parâmetro β na construção das funções de enriquecimento, como adotado em Weinhardt *et al.* (2015b). As funções utilizadas nas aplicações foram escritas no domínio de $\xi \in [-1, +1]$ da seguinte forma:

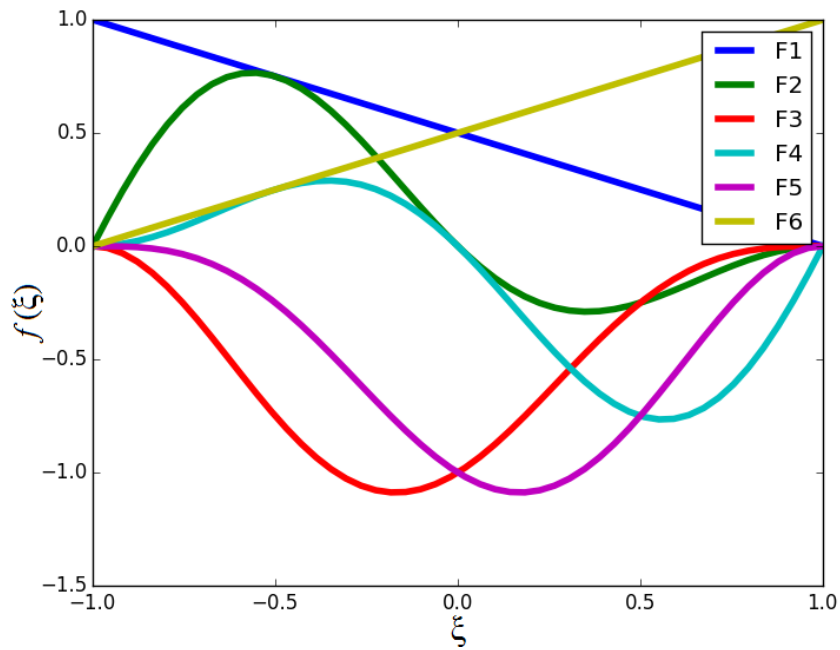


Figura 8- Base de funções de aproximação enriquecida - $j = 1$ e $\beta = 2\pi$.

Nuvem senoidal:

$$\gamma_{1j} = \text{sen}(\beta_j(\xi + 1)) \quad (132)$$

$$\gamma_{2j} = \text{sen}(\beta_j(\xi - 1)) \quad (133)$$

Nuvem cossenoidal:

$$\varphi_{1j} = \cos(\beta_j(\xi + 1)) - 1 \quad (134)$$

$$\varphi_{2j} = \cos(\beta_j(\xi - 1)) - 1 \quad (135)$$

Dessa forma, a base de aproximação é dada por:

$$\phi_{4j-1} = \phi_1 \cdot \text{sen}\left(\beta_j \frac{1+\xi}{2}\right) \quad (136)$$

$$\phi_{4j} = \phi_2 \cdot \text{sen}\left(\beta_j \frac{\xi-1}{2}\right) \quad (137)$$

$$\phi_{4j+1} = \phi_1 \left[\cos\left(\beta_j \frac{1+\xi}{2}\right) - 1 \right] \quad (138)$$

$$\phi_{4j+2} = \phi_2 \left[\cos\left(\beta_j \frac{\xi-1}{2}\right) - 1 \right] \quad (139)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as duas funções que formam uma Partição da Unidade, conforme as alternativas de escolha elencadas anteriormente. Foi escolhido trabalhar com o enriquecimento de PU com apenas duas funções por simplicidade na construção dos espaços de aproximação e pelo fato

deste ser o caso mais simples, permitindo focar no estudo dos demais fatores de influência no processo de estabilizar o MEFG.

4.4 EXTENSÃO PARA FUNÇÕES DE FORMA BIDIMENSIONAIS

Ao longo desse capítulo foram apresentadas as ferramentas necessárias para a construção do espaço de aproximação enriquecido do MEFG, particularmente para aplicações unidimensionais. A extensão dessa abordagem para a geração de bases de aproximação bidimensionais pode ser feita de forma simplificada.

Para elementos quadrilaterais, é possível gerar as funções bidimensionais pela simples multiplicação das funções escritas para o caso unidimensional, como explicado por Becker *et al.* (1981). Dessa forma, a base de aproximação bidimensional no domínio $\xi \in [-1, +1], \eta \in [-1, +1]$ é dada por:

$$\Phi(\xi, \eta) = \phi_i(\xi) \phi_j(\eta) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (140)$$

A base de funções de um elemento quadrilateral enriquecido com funções trigonométricas, conforme exposto na seção anterior e com a metodologia apresentada para obtenção das funções bidimensionais, resulta, por exemplo, nas funções representadas na figura 9

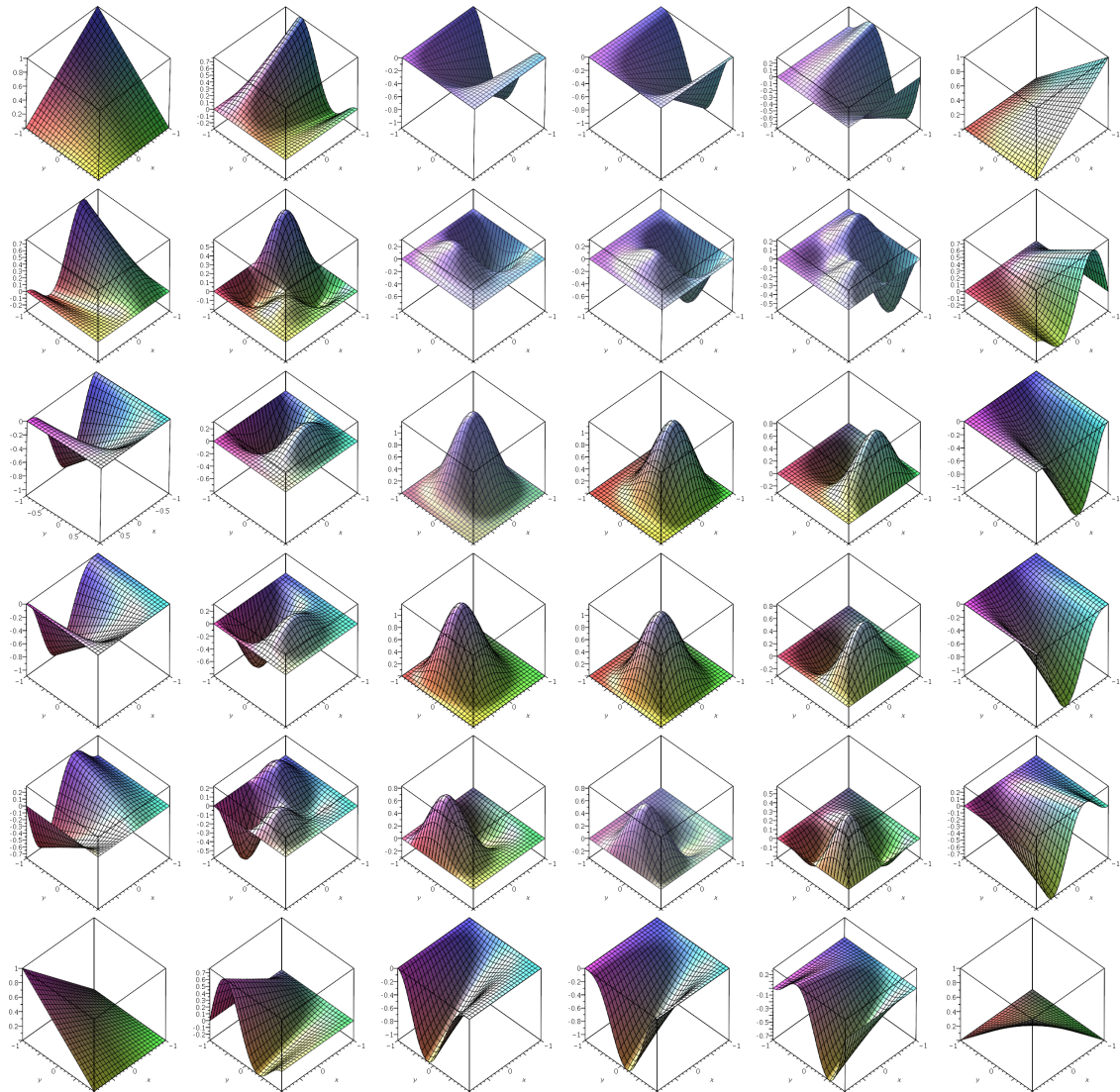


Figura 9- Base de funções de aproximação enriquecida bidimensional - $j = 1$ e $\beta = \pi$.

5 ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO MEFGE

O presente capítulo apresenta as duas abordagens propostas neste trabalho para tratar o problema de estabilidade e sensibilidade do MEFGE aplicado à Análise Dinâmica.

A primeira proposta consiste em uma modificação pré-condicionante das funções de enriquecimento, tendo-se como base o recente Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado (MEFGE), apresentado por Babuška e Banerjee (2012). Conforme exposto anteriormente, o MEFGE não foi concebido para a Análise Dinâmica e neste trabalho propõe-se uma aplicação adaptada do método nesse contexto, visando ganho de estabilidade do MEFGE.

A segunda proposta consiste em uma modificação pré-condicionante das funções de enriquecimento, tendo-se como base a observação do comportamento numérico da solução ao variar-se as funções de enriquecimento. Dado seu caráter empírico, a essa proposta foi dado o nome de Modificação Heurística.

5.1 MODIFICAÇÃO BASEADA NO MEFGE

O Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado (MEFGE) é proposto como uma alternativa para melhorar o condicionamento numérico do MEFGE (BABUŠKA; BANERJEE, 2012). Este método consiste na aplicação de uma modificação simples nas funções de enriquecimento antes da sua inclusão no espaço de aproximação do MEFGE (GUPTA *et al.*, 2013; LI, 2014).

No MEFGE, o processo de modificação das funções de enriquecimento consiste no descrito pela equação 141 (BABUŠKA; BANERJEE, 2012):

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) - I_\omega(\varphi_i(x)) \quad (141)$$

Onde,

- $\tilde{\varphi}_i$: i-ésima função enriquecedora estabilizada
- φ_i : i-ésima função enriquecedora

- $I_\omega(\varphi_i(x))$: interpolante linear por parte da i -ésima função enriquecedora subordinada ao suporte ω

A estabilização do 1º nível de enriquecimento proposto é ilustrado na Fig.10.

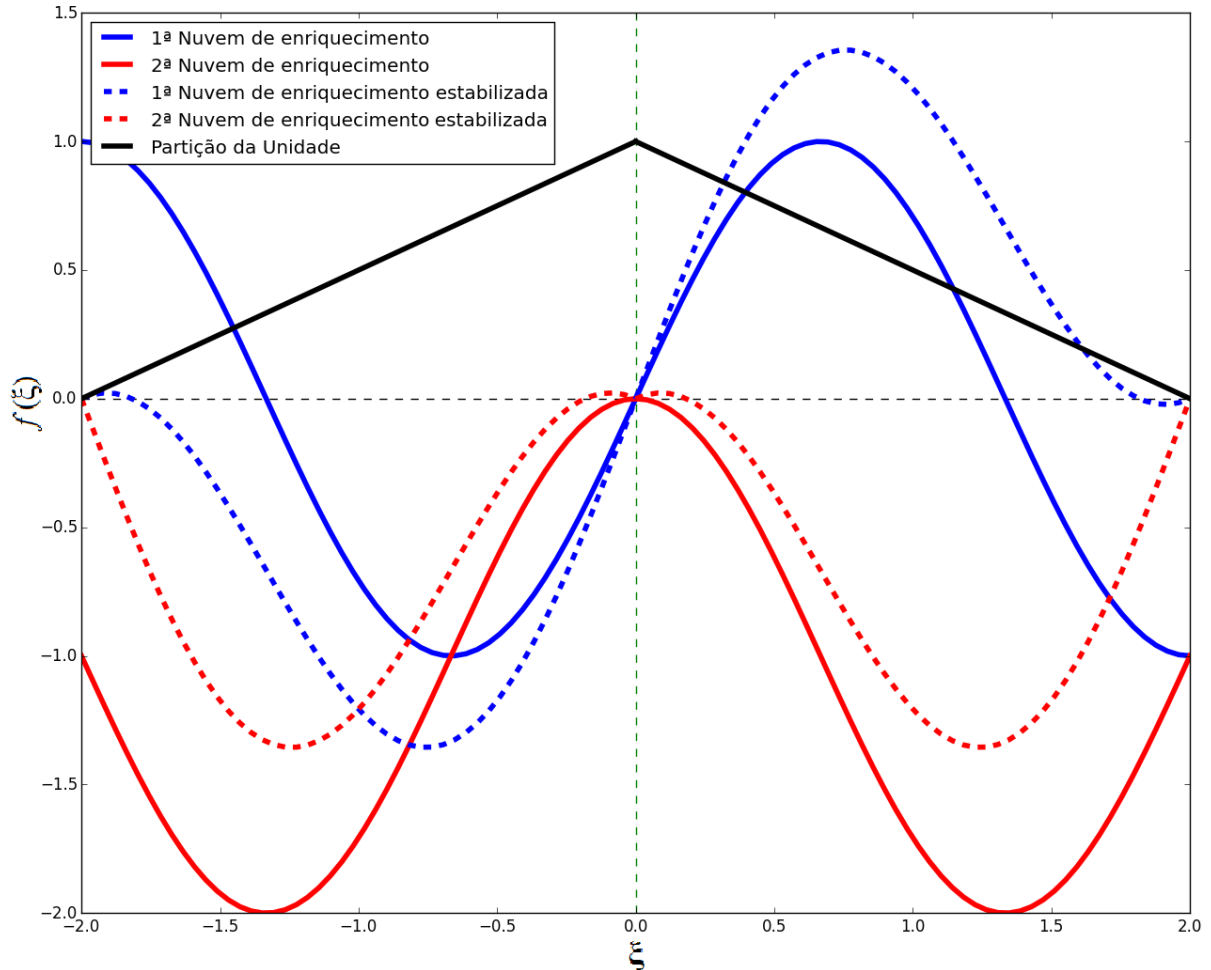


Figura 10- Processo de estabilização das funções do primeiro nível de enriquecimento.

5.2 MODIFICAÇÃO HEURÍSTICA DAS FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO

Um processo que pode resolver um determinado problema sem a garantia de que realmente irá resolvê-lo é uma heurística (FELDMAN; FEIGENBAUM, 1963). Com esta definição em mente, foram realizados testes numéricos com o intuito de encontrar uma abordagem alternativa que reduzisse a sensibilidade do MEEG com enriquecimentos trigonométricos sucessivos.

Primeiramente, é possível observar que a variação no parâmetro de enriquecimento β_1 implica em características diferentes de aproximação, conforme já apontado por Arndt (2009)

e Torii (2012). No entanto, o ganho em acurácia para certas aparenta não estar associado a ganho de estabilidade numérica. De fato, parece haver uma certa compensação entre acurácia e estabilidade numérica, no tocante a escolha do parâmetro β_1 .

Um segundo ponto de interesse consiste na observação da família de parâmetros β_j . Os j parâmetros descritos por β_j estão intrinsecamente relacionados com a forma das funções de enriquecimento e, conseqüentemente, com as relações entre as funções enriquecidas presentes na base do espaço de aproximação. Dessa forma, a evolução de β_j influencia as características numéricas da aproximação, como estabilidade. Sendo assim, buscou-se uma alteração no grupo de funções de enriquecimento visando estabilizar sua aplicação sucessiva, procurando evitar a construção de espaços de aproximação que tendem a dependência linear.

A modificação proposta consiste basicamente na mudança da regra de formação do parâmetro β_j de enriquecimento, resultando em uma modificação sutil de cada nível de enriquecimento.

Lembrando que o parâmetro β_j segue a regra de formação $\beta_j = j\alpha\pi$, propõe-se uma fórmula de modificação do parâmetro β_j para uma família de $\bar{\beta}_n$ estabilizados dada por:

$$\bar{\beta}_j = \left[2(j-1) + \frac{\beta_1}{\pi} \right] \pi \quad j \geq 1 \quad (142)$$

É interessante notar que $\bar{\beta}_1 = \beta_1$, pois:

$$\bar{\beta}_1 = \left[2(1-1) + \frac{\beta_1}{\pi} \right] \pi = \left[0 + \frac{\beta_1}{\pi} \right] \pi = \beta_1 \quad (143)$$

O que implica em não haver diferença entre a aproximação feita por esta abordagem e o enriquecimento trigonométrico para o primeiro nível de enriquecimento.

6 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados dos testes realizados através de exemplos. Primeiramente o escopo é voltado à análise unidimensional, onde são realizadas as análises modal e transiente. O encadeamento dos exemplos apresentados segue um processo de três etapas.

A primeira etapa consiste na realização de testes sem enriquecimento e com variações na Partição da Unidade, visando estudar o impacto da escolha da PU no processo de aproximação do espectro de frequências.

A segunda etapa consiste na aplicação do enriquecimento trigonométrico com valores distintos do parâmetro β , realizando o refino p com o intuito de estudar os efeitos da variação do enriquecimento no processo de enriquecimentos sucessivos.

Por fim, a terceira etapa consiste na aplicação das duas estratégias de estabilização separadas, observando seus impactos na estabilidade do MEFG. Oportunamente são apresentados gráficos que mostram a evolução da degradação do condicionamento das matrizes envolvidas no processo de enriquecimento.

Continuando os testes unidimensionais, são apresentados exemplos aplicados à análise transiente. Neste ponto são tratados três casos de carregamento transiente com respostas distintas no tempo. A aproximação é realizada com os espaços enriquecidos, comparando as abordagens não estabilizadas e estabilizadas segundo as duas propostas deste trabalho.

Por fim, volta-se o foco à extensão dos resultados de estabilização para o caso bidimensional. Neste contexto é realizada apenas a análise modal, com a apresentação de um exemplo. O resultado obtido mostra a possibilidade de utilização do refino p para a aproximação do espectro de frequências.

6.1 ANÁLISE UNIDIMENSIONAL

Nesta seção são apresentados resultados relativos a aplicação do MEFG para problemas de barras sujeitas apenas a deslocamentos axiais. São apresentados exemplos de análise

modal e transiente, testando-se diversas variações na construção da aproximação.

O desenvolvimento dos códigos para resolução dos problemas numéricos foi feito em Python, que possui rotinas de computação científica (como integração numérica, resolução de problema de autovalores e autovetores e resolução de sistemas lineares) otimizadas com códigos pré-compilados baseados em Fortran e C++ (JONES *et al.*, 2014). Em algumas situações, quando necessário, os cálculos simbólicos ou com precisão arbitrária (muitos dígitos computados) foram implementados em Maple (MAPLESOFT, 2004).

6.1.1 ANÁLISE MODAL

O exemplo 6.1 é um resultado clássico do MEF aplicado em análise dinâmica mas tem a função de apresentar aspectos que estarão presentes ao longo deste capítulo. Serão utilizadas, por exemplo, propriedades geométricas e materiais unitárias, a menos que indicado o contrário, desvinculando a análise de condições específicas, visando facilitar a análise.

6.1.1.1 MEF COM VARIAÇÕES NA PU

O primeiro exemplo a ser apresentado consiste em um resultado clássico da aplicação do MEF em análise dinâmica. O exemplo 6.1 corresponde a aplicação da formulação de elementos finitos utilizando a partição da unidade lagrangeana, descrita anteriormente.

Exemplo 6.1 (MEF Lagrangeano). *Considere-se o problema de vibração livre de barra descrito pela equação 6, sujeito a condições de contorno de Dirichlet nulas ou homogêneas (correspondendo ao caso bi-engastado) representado na figura 11.*

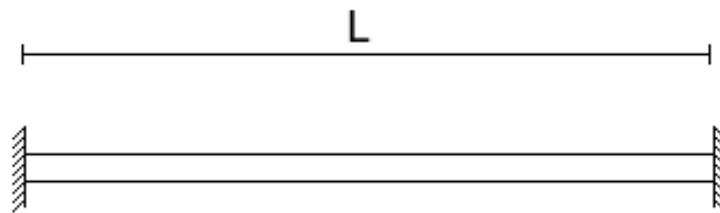


Figura 11- Barra bi-engastada.

Para fins deste exemplo, as propriedades geométricas e do material (seção constante A , módulo de elasticidade E , peso específico ρ e comprimento da barra L) são adotadas tais que $\frac{EA}{\rho L} = 1$, sem perda de generalidade.

As matrizes de massa (M) e de rigidez (K) são dadas pelas expressões 61 e 62, utilizando a base de aproximação construída a partir da PU Lagrangeana (equações 97-102) e

considerando uma malha uniforme de 100 elementos finitos.

As frequências naturais aproximadas (ω_h) são obtidas resolvendo o problema de autovalores e autovetores generalizado (equação 60), retirando-se a raiz quadrada dos autovalores (λ_h).

A solução analítica deste problema é dada por:

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (144)$$

Esta solução é utilizada para normalizar as soluções aproximadas (ω_h) como:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_h}{\omega} \quad (145)$$

Analogamente, é possível normalizar os n —ésimos graus de liberdade (n) em função do número total de graus de liberdade (N), ou seja $\bar{n} = \frac{n}{N}$. Dessa forma, a sequência de abcissas $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots, N-1, N\}$ é substituída por $\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \dots, \frac{n}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, \frac{N}{N}\}$ resultando em um espectro de frequências normalizado conforme exposto por Hughes (2000). Com isso, facilita-se a comparação entre espectros de frequências com diferentes números de graus de liberdade.

Assim, para as aproximações não enriquecidas (MEF) decorrentes de polinômios de Lagrange até grau 3 (lineares, quadráticos e cúbicos), o espectro de frequências é apresentado na figura 12.

O processo de normalização do espectro exposto no decorrer do exemplo 6.1 permite a comparação das diversas abordagens (enriquecimentos e refinamentos) sem a necessidade de igualar o número de graus de liberdade. Dessa forma, essa ferramenta será utilizada sempre que necessária para comparação entre abordagens que gerem diferentes números de graus de liberdade.

A análise do espectro de frequências da figura 12 expõe uma característica limitante do MEF no contexto da análise dinâmica: a deterioração da qualidade de resposta para frequências acima de uma determinada faixa inicial. Para o MEF Linear, por exemplo, tem-se resultados com grande acurácia apenas para os primeiros 10% do espectro de frequências. A medida em que se aumenta o grau polinomial de aproximação, no processo chamado de refino p , melhora-se essa faixa de aproximação com boa acurácia, como é possível observar para os espectros referentes às aproximação por MEF Quadrático e Cúbico.

A medida que se avança no refino p , é possível notar que as faixas de frequências mais

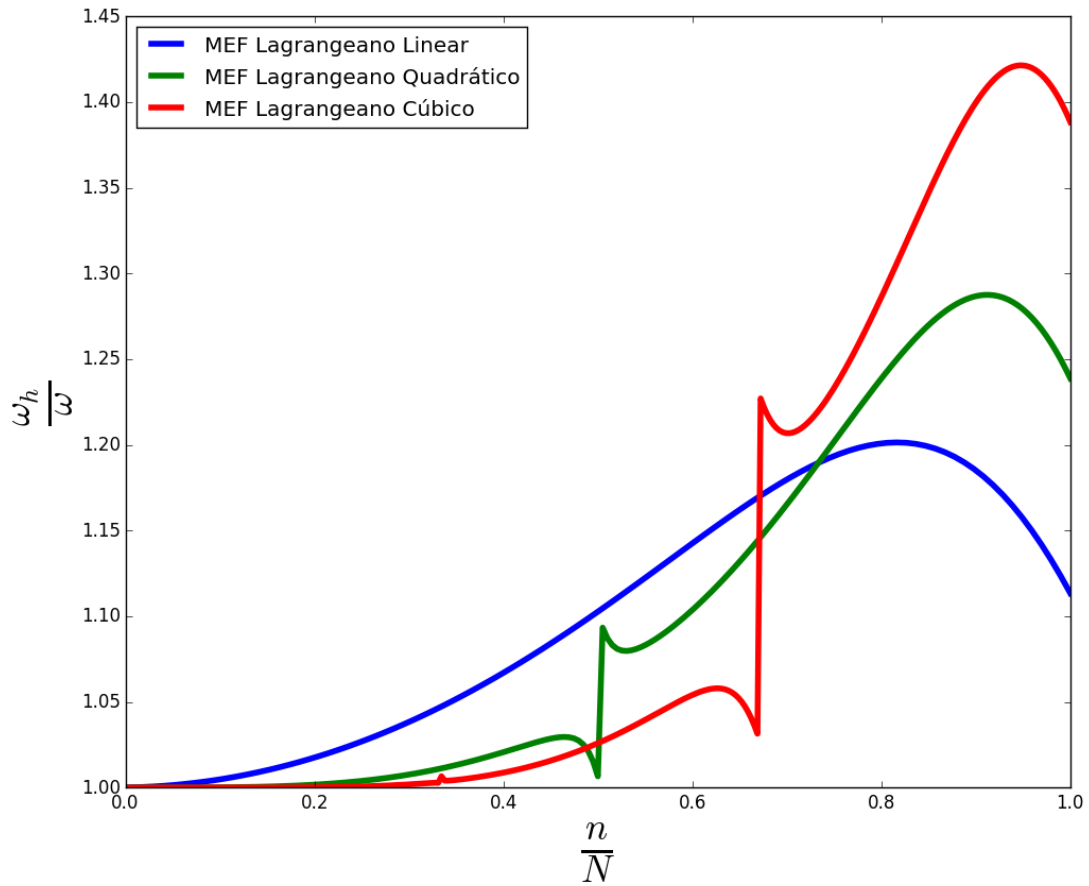


Figura 12- Espectro de Frequências - MEF com Partição da Unidade Lagrangeana.

elevadas no espectro passam a ter sua aproximação deteriorada. Essa separação entre frequência mais baixas e mais elevadas, que está relacionada com sua qualidade de aproximação, é conhecida na literatura como ramo acústico (faixa inferior) e ramo óptico (faixa superior).

Visando melhorar a aproximação do espectro é natural indagar o que acontece com o espectro de frequências ao se alterar as funções de base do MEF, ou seja, qual o efeito da partição da unidade. Pode-se escolher diferentes partições da unidade, regulando por exemplo: número de funções na base, regularidade ou facilidade de desenvolvimento do código computacional.

O presente estudo se restringiu a possíveis variações de PU com duas funções pois isto facilita a comparação entre as diferentes abordagens e possibilita uma implementação mais simples. Além disso, o número de funções da base de aproximação pode ser aumentado utilizando o processo de enriquecimento.

Para a análise da influência da regularidade no processo de solução aproximada do espectro considera-se primeiramente a utilização de uma PU definida a partir de Polinômios Racionais, conforme descrito pelas equações 109 e 110. O resultados para variações de regula-

ridade são expostos no exemplo 6.2.

Exemplo 6.2. Considere-se o problema de vibração livre de uma barra como descrito no exemplo 6.1. A aproximação por MEF utilizando funções de Shepard com $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ em uma malha de 100 elementos finitos resulta no espectro de frequências normalizado representado na figura 13.

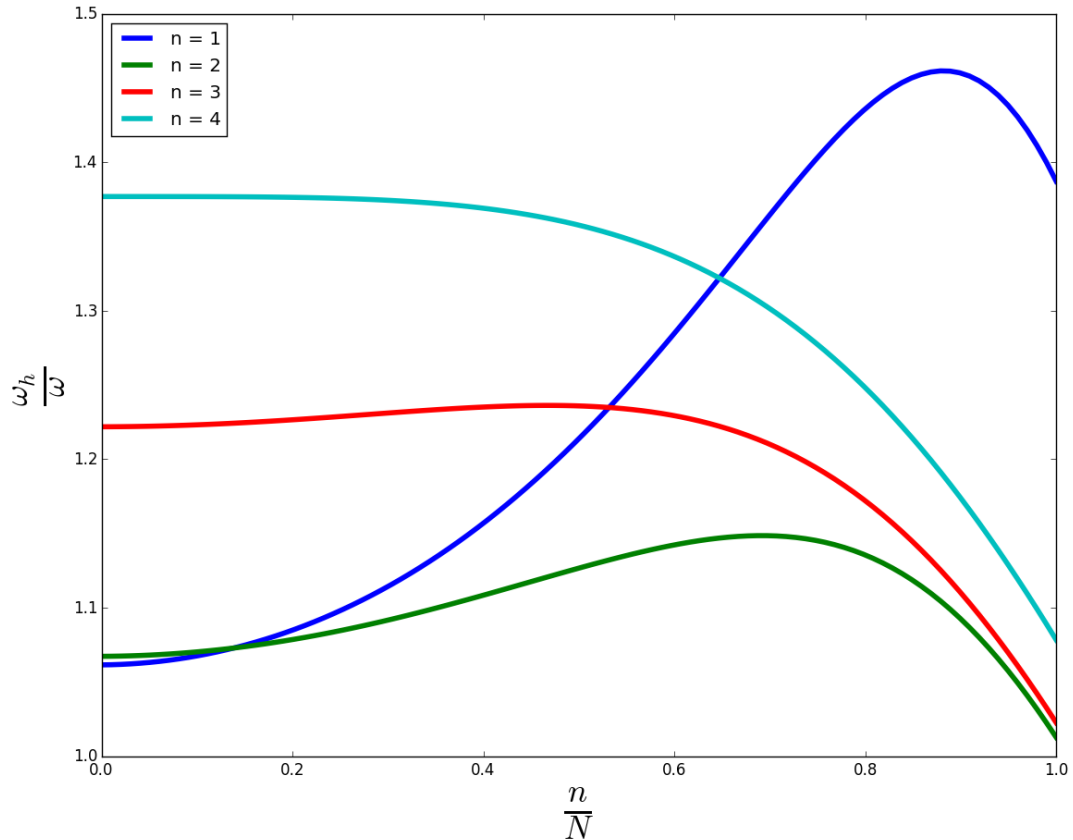


Figura 13- Espectro de Frequências - MEF com Partição da Unidade baseada em funções de Shepard com $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

O exemplo 6.2 apresentou os espectros de frequência normalizados para uma aproximação sem enriquecimento utilizando funções de Shepard como partição da unidade. Foram escolhidos quatro valores distintos para o parâmetro n que determina a regularidade dessas funções: $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Para $n = 1$ as funções de Shepard tem regularidade C^0 e o espectro correspondente a essa aproximação é semelhante, em formato, ao resultado proveniente do MEF Lagrangeano Linear. No entanto, a acurácia da faixa inicial do espectro é bastante deteriorada, tendo um erro acima de 5%.

Aumentando o parâmetro n para 2, tem-se um aumento da regularidade para C^2 , de acordo com sua definição. Essa mudança nas características da PU tem um impacto direto

no comportamento do espectro. Enquanto para $n = 1$ o espectro teve diminuição da acurácia para frequências mais elevadas, o resultado decorrente das funções para $n = 2$ apresentou um comportamento não convencional, tendo uma melhora na aproximação justamente para o trecho final do espectro de frequências.

Fazendo $n = 3$, por definição, a regularidade continua em C^2 mas os resultados passam a sofrer uma deterioração bastante significativa, resultando em erros para as primeiras frequências acima de 20%. Apesar disso, é importante ressaltar a expressiva mudança na distribuição do erro que passa a decrescer para frequências superiores.

Por fim, para $n = 4$ tem-se regularidade C^4 e uma aproximação com baixa acurácia. No entanto, seguindo a tendência apresentada para $n = 3$, o aumento do parâmetro n , e consequente aumento da regularidade, implicaram em um comportamento peculiar do espectro de frequências com melhora de acurácia a medida que se avança no espectro.

É interessante notar que enquanto as aproximações com PU Lagrangeana apresentam uma boa aproximação para as primeiras frequências e tem a acurácia deteriorada a medida que se avança no espectro, a adoção de funções de Shepard para $n > 1$ parece inverter essa tendência, tendo ganho de acurácia para frequências mais altas.

Essa mudança vem ao custo de uma perda de acurácia significativa cuja razão aparenta ser a disparidade entre o aumento de regularidade da base de aproximação sem o aumento da dimensão do espaço de aproximação. Por exemplo: é possível construir uma base de aproximação com duas funções polinomiais de grau 2, mas essa base não gera o espaço de polinômios de grau menor ou igual a dois, P^2 , pois $\dim(P^2) = 3$.

Dessa forma, visando aproveitar a mudança nas características de aproximação realizada com o aumento da regularidade, pode-se cobrir essa falha no espaço de aproximação através da utilização de funções de enriquecimento. Essa abordagem será exposta mais a frente neste trabalho.

Assumindo a hipótese levantada de que a regularidade do espaço de aproximação impacta o espectro de frequências de maneira a melhorar a aproximação de frequências mais elevadas, apresenta-se a seguir o exemplo 6.3, que aplica uma PU com regularidade C^∞ .

Exemplo 6.3. *Considere-se agora o problema de vibração livre de barra descrito no exemplo 6.1. A aproximação por MEF utilizando funções trigonométricas, baseando-se na relação trigonométrica fundamental, em uma malha de 100 elementos finitos resulta no espectro de frequências normalizado representado na figura 14.*

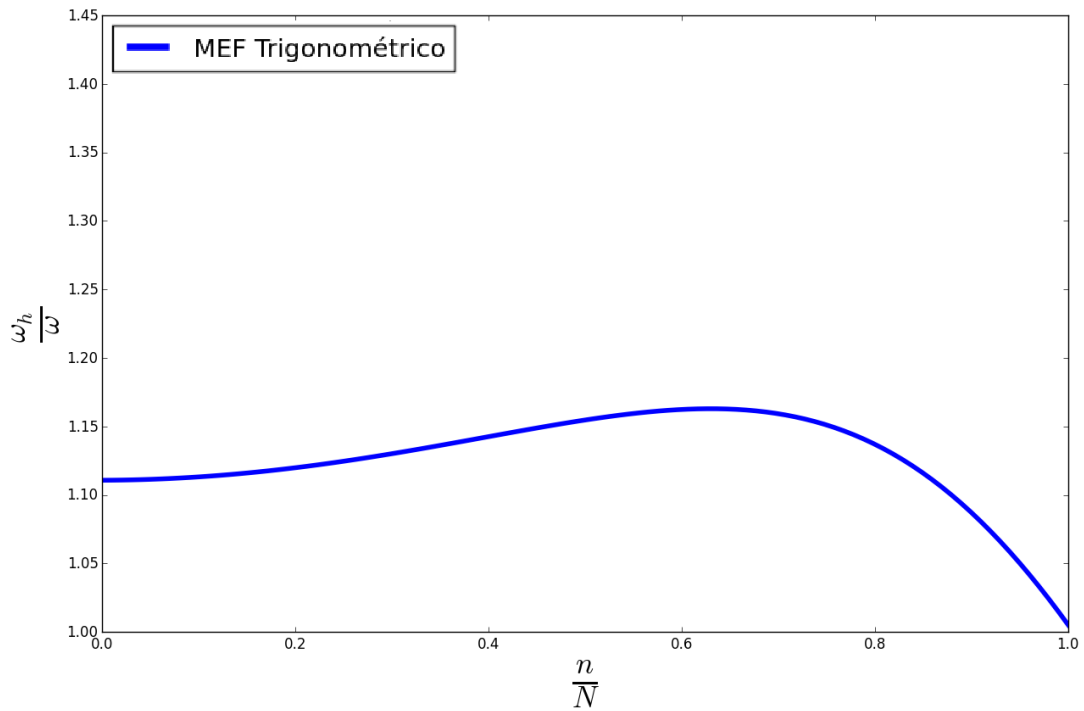


Figura 14- Espectro de Frequências - MEF com Partição da Unidade baseada na Relação Trigonômétrica Fundamental.

O exemplo 6.3 apresentou os espectros de frequência normalizados para uma aproximação sem enriquecimento utilizando uma partição da unidade baseada na relação trigonométrica fundamental com regularidade C^∞ .

As características de alta regularidade da partição da unidade trigonométrica adotada geraram um resultado bastante interessante. De forma análoga ao observado com as funções de Shepard, o aumento da regularidade alterou o comportamento do espectro, modificando a forma como o erro se distribui para as frequências em relação aos aspectos usuais obtidos com partições da unidade lagrangeanas.

Os erros para o início do espectro são significativos (acima de 10%), porém moderados ao contrário da tendência apresentada para as funções de Shepard. Além disso, há uma convergência com boa acurácia para o trecho final do espectro, refletindo uma possível influência da alta regularidade na qualidade da aproximação de frequências elevadas.

Assim como argumentado anteriormente, é possível aproveitar essa tendência de aproximar com qualidade as frequências elevadas cobrindo as falhas no espaço de aproximação através da utilização de funções de enriquecimento. Dessa forma, na próxima seção será discutida essa abordagem.

6.1.1.2 MEFG TRIGONOMÉTRICO

Uma vez elencadas as alternativas de interesse para partição da unidade e estudadas as respectivas características de aproximação, é possível construir os espaços de aproximação enriquecidos do MEFG.

Os exemplos da seção anterior serão revistos sob a óptica do enriquecimento trigonométrico, visando estudar o comportamento do espectro de frequências analisando variações nos seguintes aspectos:

- Variação do parâmetro β de enriquecimento;
- Aplicação de níveis de enriquecimentos sucessivos.

Isto posto, apresentam-se os exemplos 6.4, 6.5 e 6.6 que abrangem as diferentes partições da unidade enriquecidas com um nível de funções trigonométricas e diferentes valores de β .

Exemplo 6.4. Considere-se o problema de vibração livre de barra tal como no exemplo 6.1. A aplicação de um nível de enriquecimento trigonométrico com $\beta = \frac{3\pi}{4}$ em cada uma das alternativas de escolha de partição da unidade expostas anteriormente resulta nos espectros de frequências normalizados representados na figura 15.

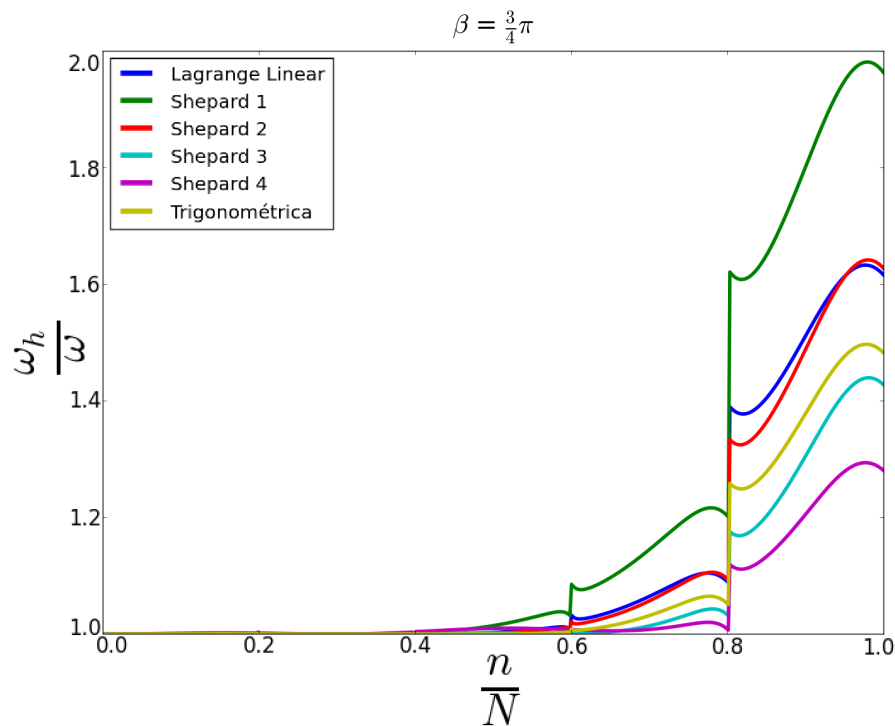


Figura 15- Espectro de Frequências - MEFG Trigonômico com $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

A figura 16 representa os mesmos resultados da figura 15 focando na primeira metade do espectro de frequências para melhorar a visualização.

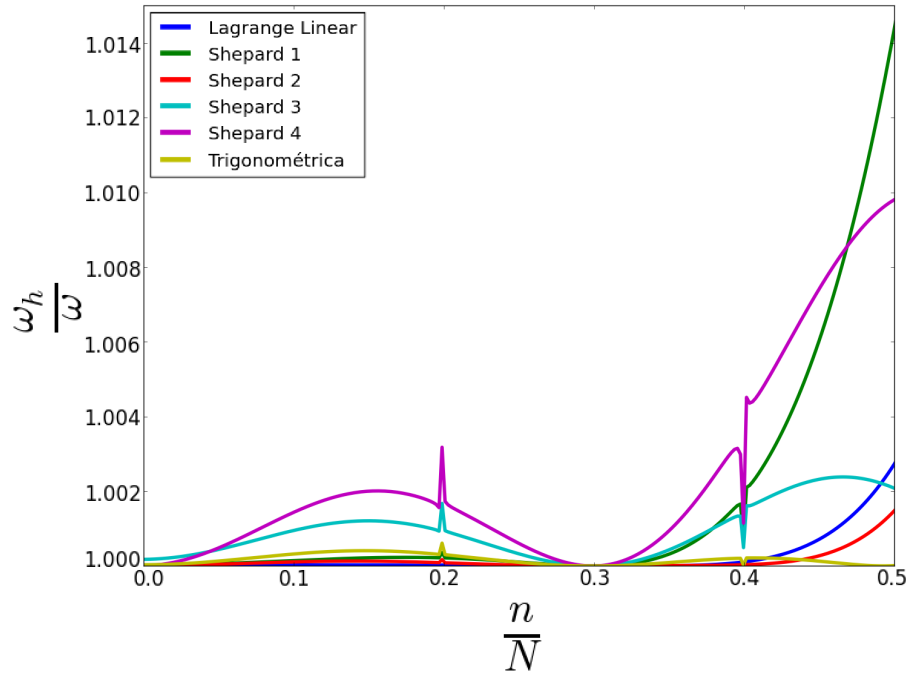


Figura 16- Primeira metade do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

O exemplo 6.4 mostra um ganho expressivo de acurácia com o enriquecimento trigonométrico para os diferentes tipos de PU. Para o caso da partição da unidade lagrangeana linear esse resultado já havia sido constatado anteriormente por Arndt (2009) e Torii (2012). No entanto, outros tipos de funções ainda não haviam sido testadas. Dessa forma, é possível observar pelo espectro apresentado nas figuras 15 e 16 que o enriquecimento trigonométrico aprimora a aproximação de todas as frequências.

Entre as aproximações realizadas pelas funções de Shepard enriquecidas há uma ordenação no trecho final do espectro (figura 15), sendo que o aumento do parâmetro n aparenta favorecer a aproximação das frequências mais elevadas. Porém, pelo que é possível observar na figura 16, esse ganho vem ao custo de uma deterioração da resposta nas frequências mais baixas.

A utilização da PU de funções trigonométricas, por sua vez, apresentou resultados mais equilibrados do que os decorrentes da construção com funções de Shepard. De fato, é possível observar que essa abordagem apresenta um resultado intermediário aos resultados obtidos com as outras alternativas. Porém, para os primeiros 40% do espectro, a PU lagrangeana linear apresentou a melhor aproximação e todas as abordagens tiveram resultados com baixa acurácia

no trecho final do espectro.

Exemplo 6.5. *Seja agora o problema de vibração livre de barra tal como no exemplo 6.1. A aplicação de um nível de enriquecimento trigonométrico com $\beta = \frac{7\pi}{8}$ em cada uma das alternativas de escolha de partição da unidade expostas anteriormente resulta nos espectros de frequências normalizados representados na figura 17.*

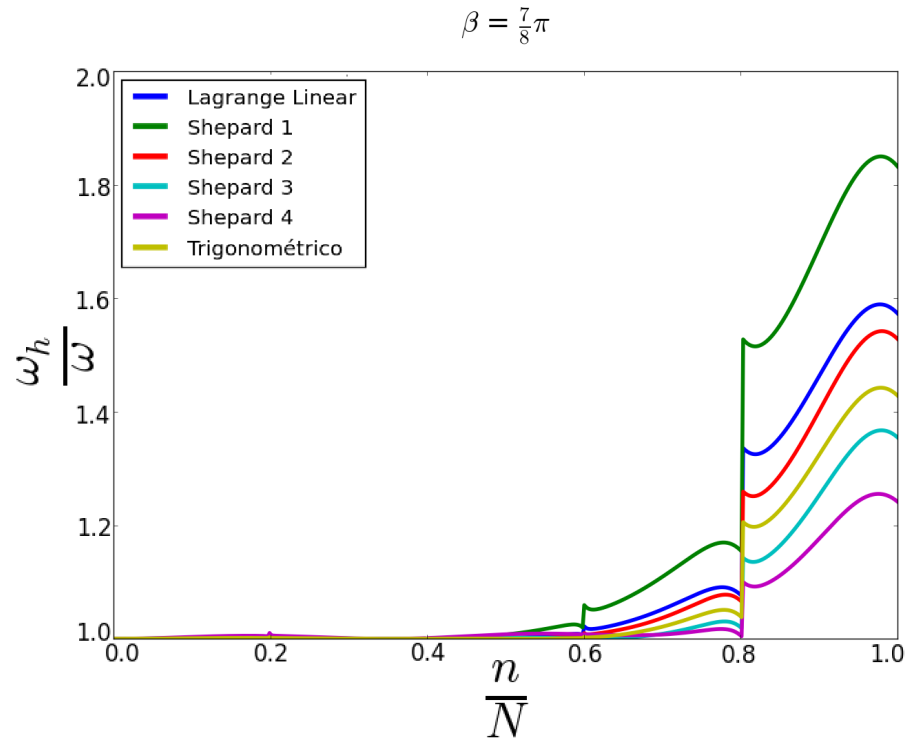


Figura 17- Espectro de Frequências - MEEG Trigonométrico com $\beta = \frac{7\pi}{8}$.

A figura 18 representa os mesmos resultados da figura 17 focando na primeira metade do espectro de frequências para melhorar a visualização.

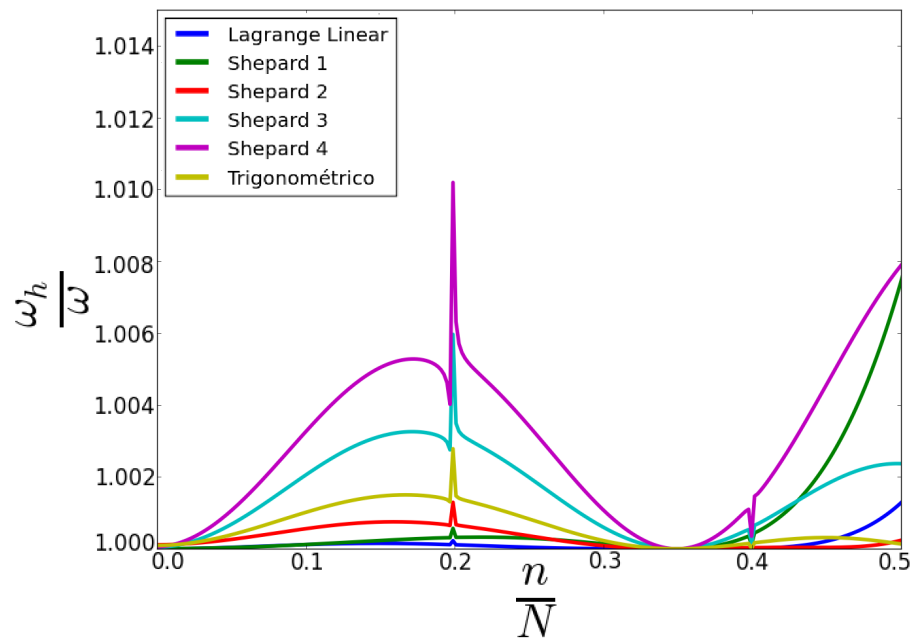


Figura 18- Primeira metade do Espectro de Frequências - MEEG Trigonométrico com $\beta = \frac{7\pi}{8}$.

O exemplo 6.5 aplicou o enriquecimento trigonométrico com uma modificação no parâmetro β , fazendo-o $\beta = \frac{7\pi}{8}$. Esse enriquecimento apresentou, assim como o enriquecimento do exemplo 6.4, um aumento de acurácia em relação a aplicação do MEF convencional.

Comparando os resultados do exemplo 6.5 com os apresentados no exemplo 6.4 pode-se observar uma ligeira modificação nas características do espectro enriquecido e conservação do comportamento relativos entre os espectros provenientes das diferentes escolhas de PU. Observando a figura 17 é possível notar que houve melhora no trecho final do espectro para todas as escolhas de PU, enquanto que, como mostrado pela figura 18, é possível aferir uma deterioração na resposta para frequências mais baixas. Ou seja, comparando-se os dois exemplos, é possível supor que a escolha do parâmetro β repercute em certa melhora em alguns trechos do espectro e prejudica a acurácia em outros. É interessante observar que essa observação é especialmente útil ao interpretar o MEEG-Adaptativo proposto por Arndt (2009).

Exemplo 6.6. Neste contexto será tratado o problema de vibração livre de barra tal como no exemplo 6.1. A aplicação de um nível de enriquecimento trigonométrico com $\beta = \pi$ em cada uma das alternativas de escolha de partição da unidade expostas anteriormente resulta nos espectros de frequências normalizados representados na figura 19.

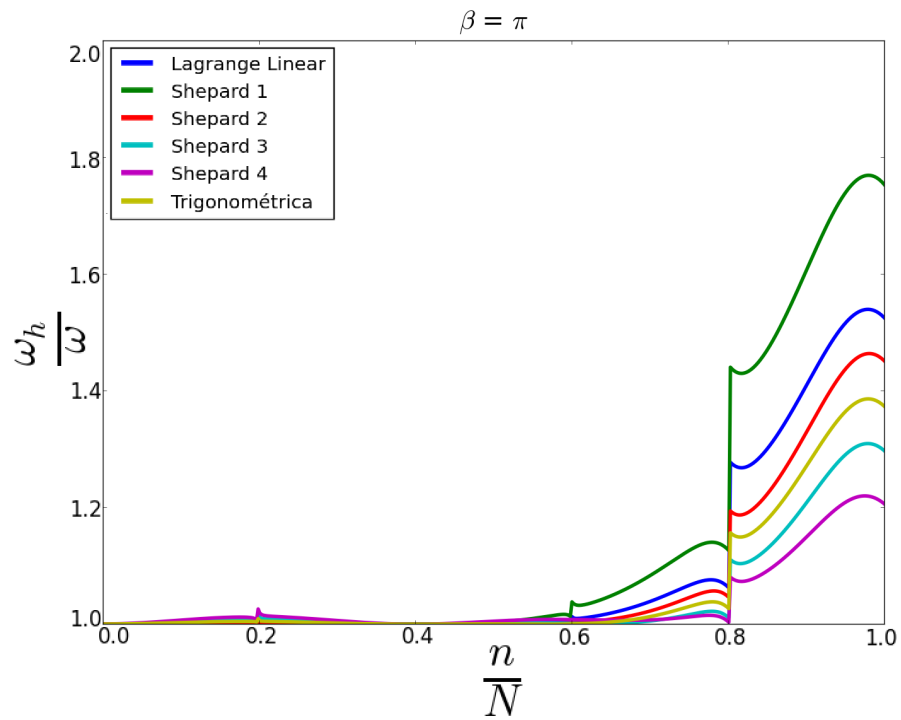


Figura 19- Espectro de Frequências - MEFG Trigonômétrico com $\beta = \pi$.

A figura 20 representa os mesmos resultados da figura 19 focando na primeira metade do espectro de frequências para melhorar a visualização.

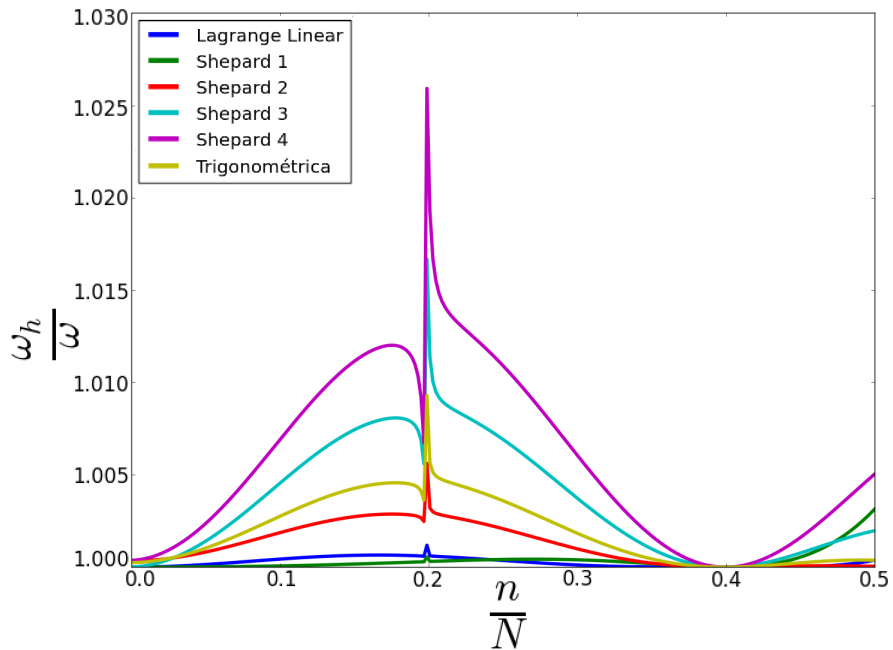


Figura 20- Primeira metade do Espectro de Frequências - MEFG Trigonômétrico com $\beta = \pi$.

O exemplo 6.6 aplicou o enriquecimento trigonométrico com uma modificação no

parâmetro β , fazendo $\beta = \pi$, corroborando a análise da tendência observada nos exemplos 6.4 e 6.5. Na figura 19 é possível notar a melhora da acurácia para frequências mais elevadas, comparando com os resultados apresentados nos exemplos anteriores, ao passo que a figura 20 destaca a deterioração da aproximação nos trechos iniciais dos espectros.

Uma alternativa natural para melhorar de forma mais global a aproximação do espectro, são os enriquecimentos sucessivos, agregando a cada nível de enriquecimento um novo parâmetro β . Esse procedimento pode ser interpretado como uma extensão do conceito de refino p de elementos finitos, sendo designado dessa forma por Torii (2012) neste contexto. Uma outra nomenclatura presente na literatura é o refino analítico, desvinculando-se assim do conceito de espaços polinomiais. Neste trabalho adotou-se o termo “refino p ” em função da consagração do termo.

Dessa forma, os exemplos 6.7, 6.8 e 6.9 expõem os resultados de enriquecimentos sucessivos seguindo a ordem de construção clássica dos parâmetros $\beta_j = j\alpha\pi$, descrita anteriormente. Foi adotado $\alpha = \frac{3}{4}$, alinhando-se ao exemplo 6.4. É válido ressaltar que o refino p é feito de forma hierárquica no contexto do MEFG, o que reduz expressivamente o esforço computacional.

Exemplo 6.7. *Considere-se o problema de vibração livre de barra descrito no exemplo 6.4. A aplicação do segundo nível de enriquecimento trigonométrico resulta nos espectros de frequências mostrados na figura 21.*

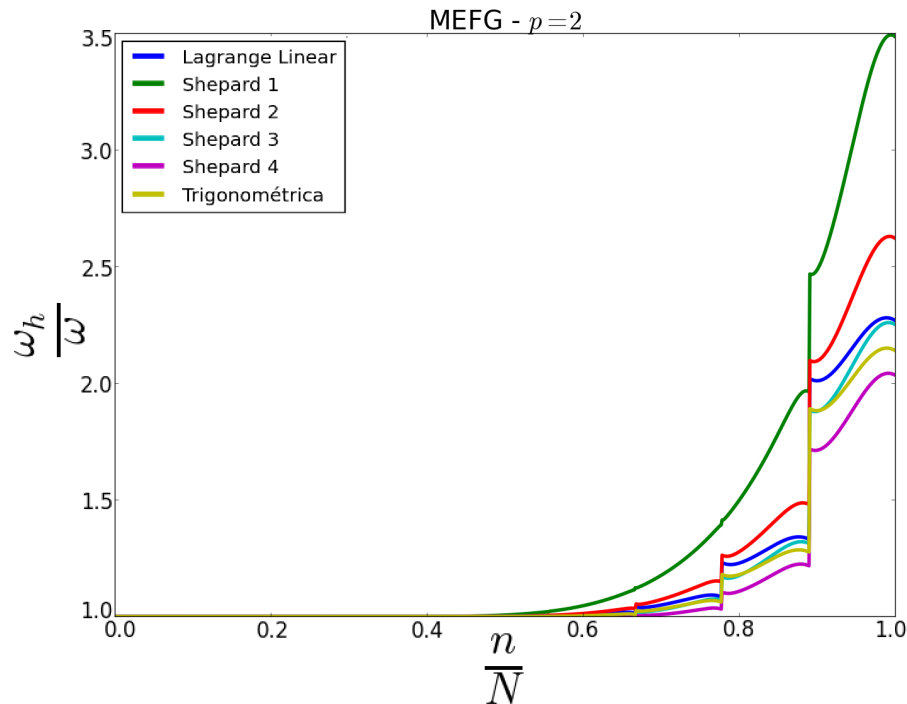


Figura 21- Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 2 níveis de enriquecimento.

A figura 22 representa os mesmos resultados da figura 21 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

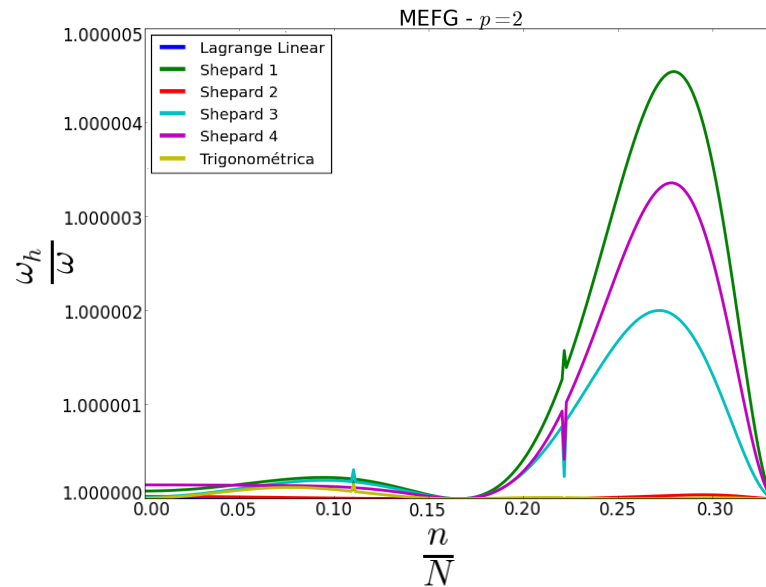


Figura 22- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG Trigonômétrico com 2 níveis de enriquecimento.

Focando a análise apenas nas respostas de espectro "Lagrange Linear" e "Shepard 2", a figura 23 apresenta um aspecto mais aproximado.

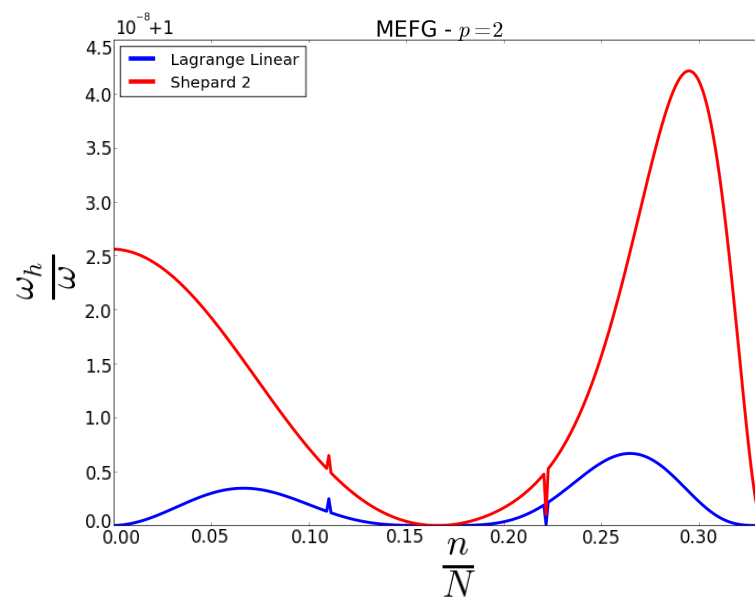


Figura 23- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG Trigonômétrico com 2 níveis de enriquecimento (Análise local).

O exemplo 6.7 apresentou os resultados da aplicação do refino p trigonométrico. A melhora em termos de acurácia é bastante significativa para as diversas escolhas de PU, como é possível observar na figura 21.

Pode-se destacar a aproximação com menos acurácia do espectro referente a "Shepard 1", enquanto que as demais abordagens tem comportamentos semelhante, principalmente no trecho final do espectro. Por outro lado, ao ser observar o trecho inicial do espectro, apresentado na figura 22, é possível destacar que as alternativas "Lagrange Linear" e "Shepard 2" apresentam excelentes resultados para as frequências mais baixas. Voltando a análise para a comparação entre essas duas abordagens, a figura 23 destaca a acurácia superior da alternativa "Lagrange Linear", com erros na ordem de 10^{-9} para essa faixa do espectro.

Exemplo 6.8. Considere-se o problema de vibração livre de barra descrito no exemplo 6.7. A aplicação do terceiro nível de enriquecimento trigonométrico resulta nos espectros de frequências mostrados na figura 24.

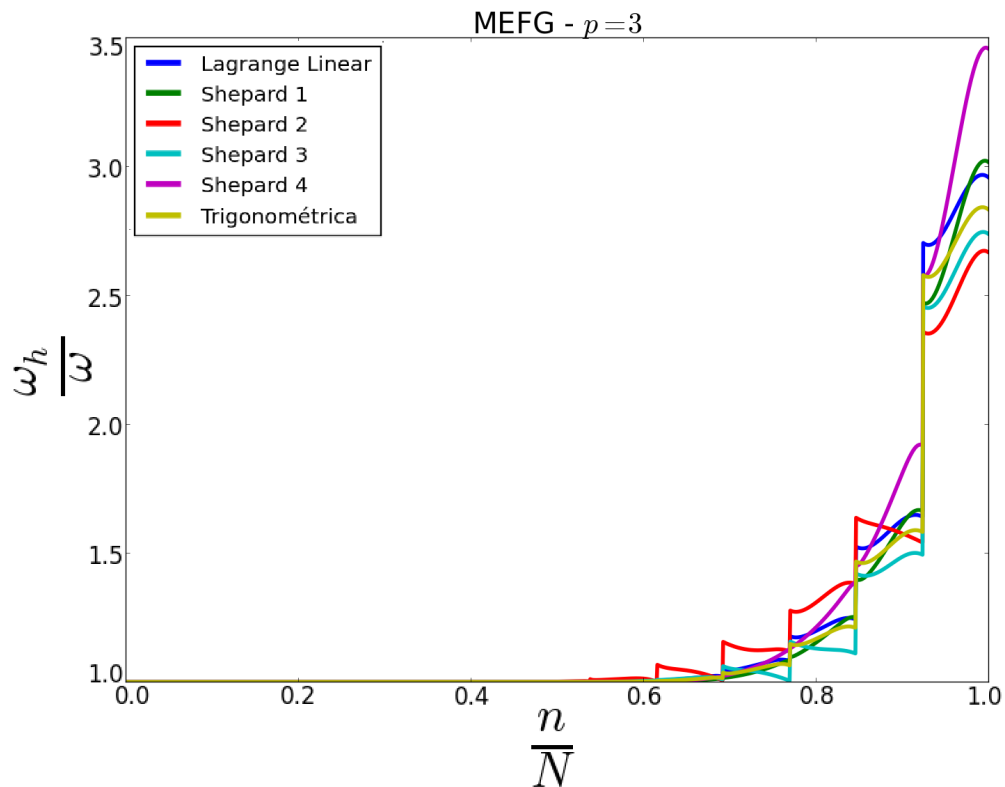


Figura 24- Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 3 níveis de enriquecimento.

A figura 25 representa os mesmos resultados da figura 24 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

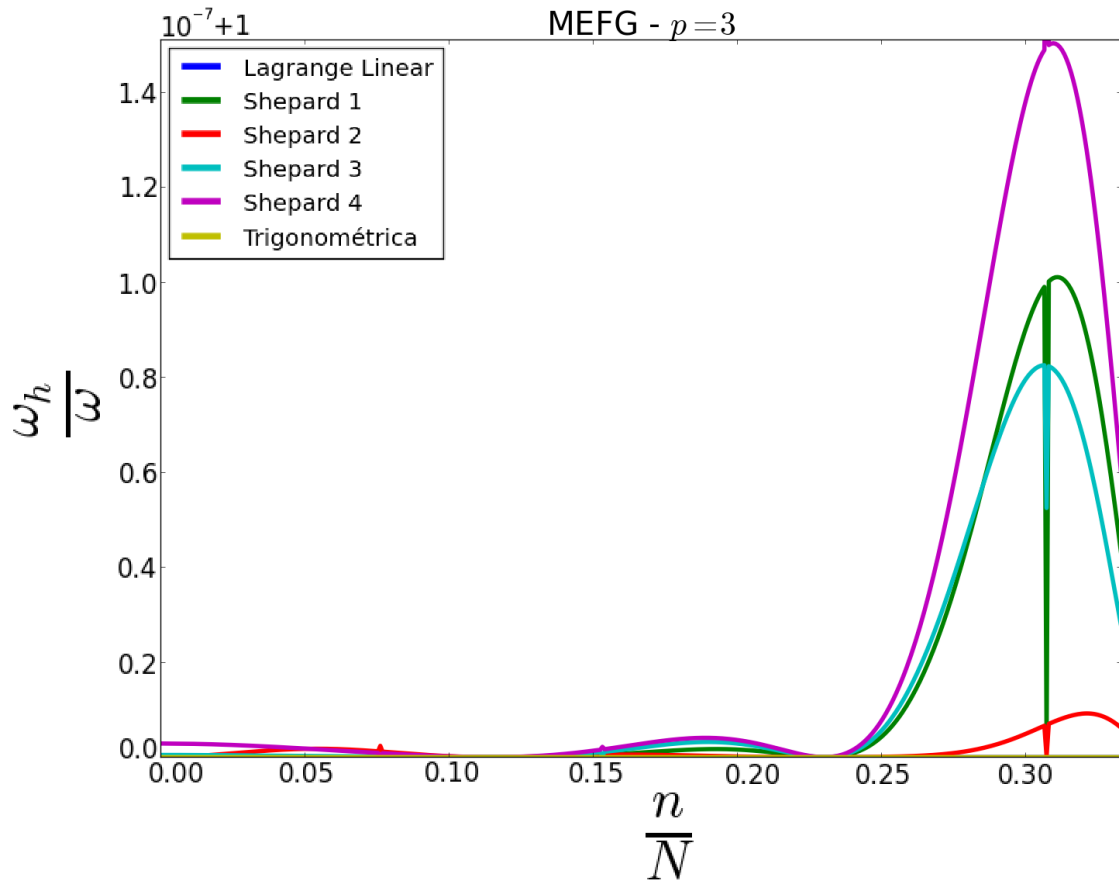


Figura 25- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 3 níveis de enriquecimento.

O exemplo 6.8 apresentou os resultados da aplicação de mais uma etapa de refino p trigonométrico. A figura 24 mostra um ganho adicional de acurácia ao longo do espectro.

As diferentes abordagens resultam em espectros relativamente próximos que tendem a ter um comportamento semelhante para frequências mais elevadas. No entanto, mudando a escala de observação, a figura 25 destaca que há diferença significativa de acurácia entre as alternativas, sendo que a escolha da partição da unidade lagrangeana linear apresenta qualidade de aproximação bastante superior para as frequências mais baixas, sem sacrifício da aproximação do trecho final do espectro.

O refino p parece convergir para uma aproximação excelente do espectro apesar de o erro para a aproximação das últimas frequências aumentar a cada novo nível de enriquecimento. A busca por uma acurácia maior para todo o espectro pode ser especialmente importante para a análise dinâmica nos casos onde há uma excitação externa com alta frequência. Dessa forma, investiga-se melhor o processo de refino p com o intuito de obter soluções ainda melhores com o método.

Exemplo 6.9. Considere-se o problema de vibração livre de uma barra tal como descrito no exemplo 6.8. A aplicação do quarto nível de enriquecimento trigonométrico resulta nos espectros de frequências mostrados na figura 26.

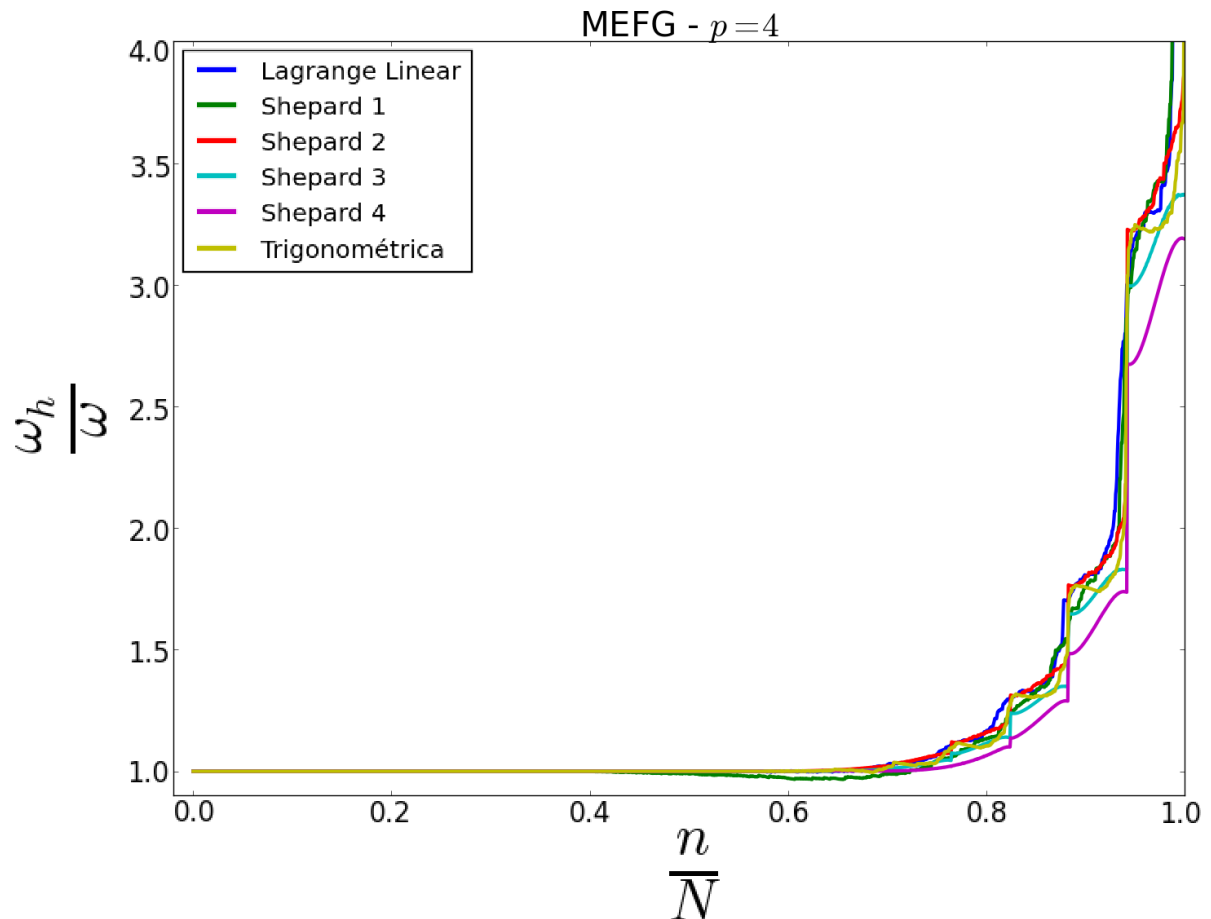


Figura 26- Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 4 níveis de enriquecimento.

Aspectos decorrentes da instabilidade numérica da solução são destacados na figura 27 que apresenta os mesmos resultados presentes na figura 26 focando em um comportamento local.

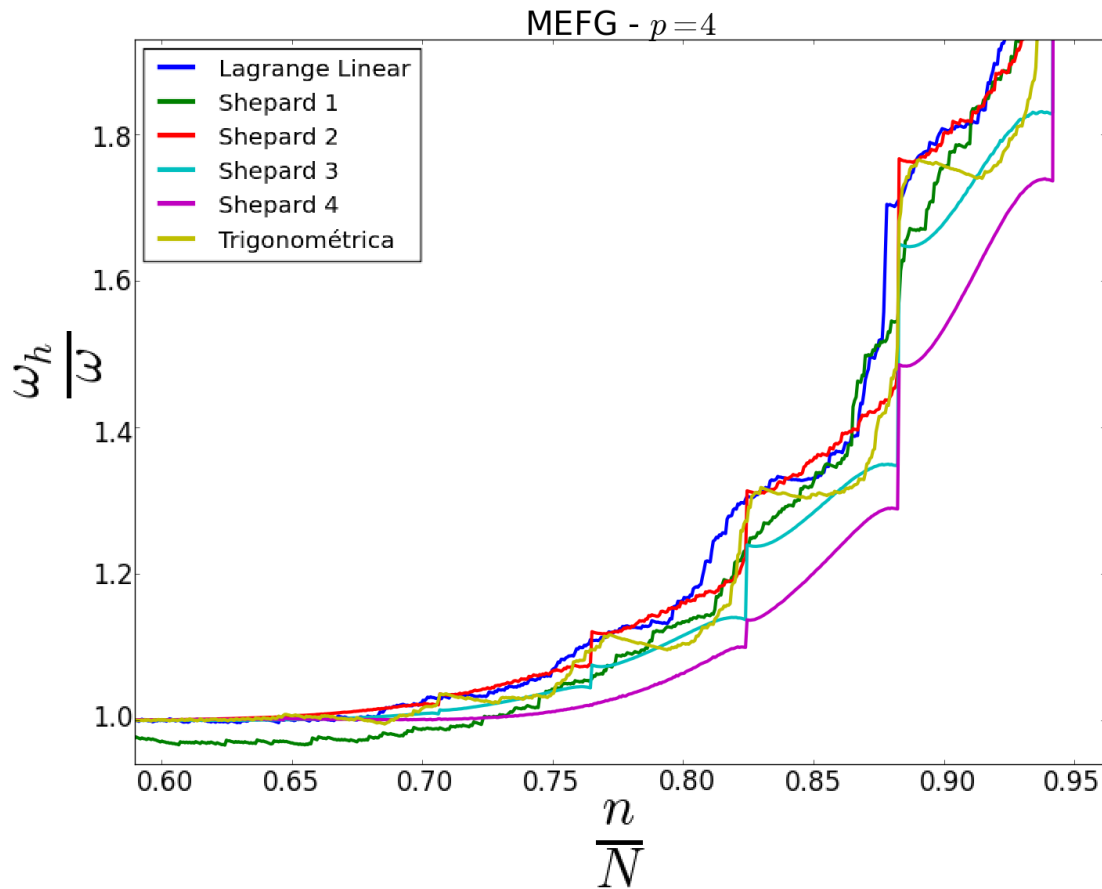


Figura 27- Espectro de Frequências - MEFG Trigonométrico com 4 níveis de enriquecimento (Detalhe local).

O exemplo 6.9 apresentou os resultados da aplicação de mais uma etapa de refino p trigonométrico. A figura 26 mostra que há uma tendência a suavização dos espectros de frequência, com aumento de acurácia para frequências mais baixas e deterioração da resposta para as frequências mais elevadas.

No entanto, a aplicação do 4º nível de enriquecimento implicou em uma instabilidade numérica, gerando respostas inválidas. Uma explicação para o fenômeno é dada pelo Teorema 3.26 que garante que os autovalores são aproximados monotonicamente por valores superiores a resposta. Dessa forma, não é esperado que haja frequências sendo aproximadas por valores inferiores. Esse resultado é importante para interpretar que, como mostrado na figura 27, há uma instabilidade numérica que compromete a aproximação do método.

Resultados como o apresentado no exemplo 6.9 foram apontados como problema de estabilidade do método por Arndt (2009), Torii (2012) e Shang (2014) e indicados para estudos futuros. Os resultados específicos deste trabalho, relacionando escolhas de partição da unidade, estendem e corroboram essa observação.

Com isso, retorna-se ao foco deste estudo para estratégias de estabilização destinadas ao Método dos Elementos Finitos Generalizados em análise dinâmica. Neste ponto, optou-se por restringir o estudo dessas estratégias utilizando apenas a partição da unidade lagrangeana linear, em função da facilidade de implementação e por seus resultados superiores nos diversos testes realizados.

6.1.1.3 MEFG ESTABILIZADO APLICADO À DINÂMICA

Uma vez identificado o problema de instabilidade MEFG para o refino p , pretende-se buscar estratégias para tornar sua aplicação mais estável. A primeira alternativa apresentada é baseada no Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado.

Dessa forma, os exemplos de refino p da seção anterior serão revistos com este enfoque, visando estudar o comportamento do espectro de frequências e o condicionamento das matrizes envolvidas. Serão apresentados, além dos espectros de frequências normalizados, os números de condicionamento das matrizes de massa e rigidez, com o intuito de acompanhar o processo de estabilização.

Exemplo 6.10. *Considere-se o problema de vibração livre do exemplo 6.1 e enriquecimento da PU Lagrangeana Linear de duas formas: MEFG conforme os exemplos 6.10, 6.11, 6.12 e 6.13; e MEFGE conforme metodologia descrita na seção 5.1. Os espectros de frequências normalizados resultantes são apresentados na figura 28.*

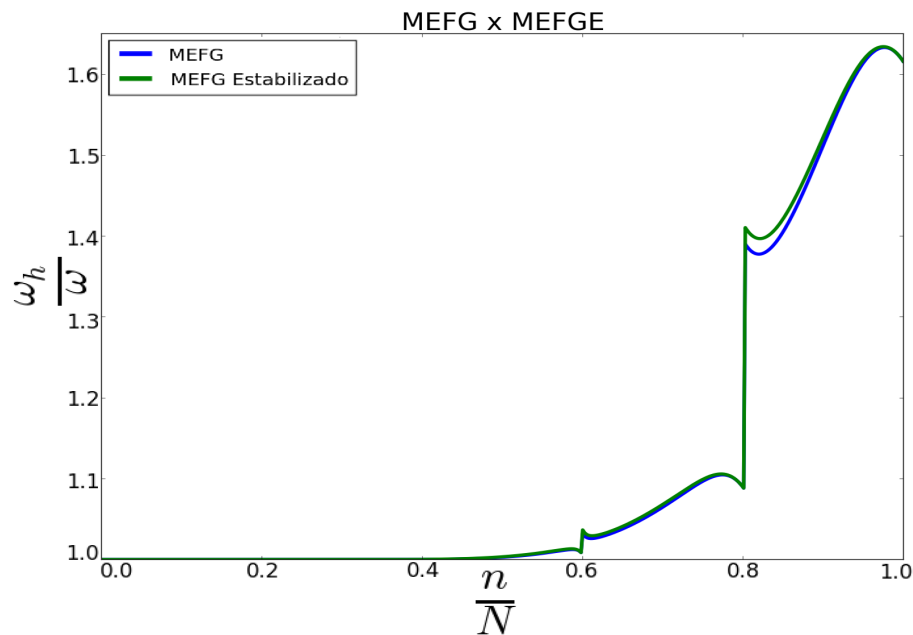


Figura 28- Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 1 nível de enriquecimento.

A figura 29 representa os mesmos resultados da figura 28 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

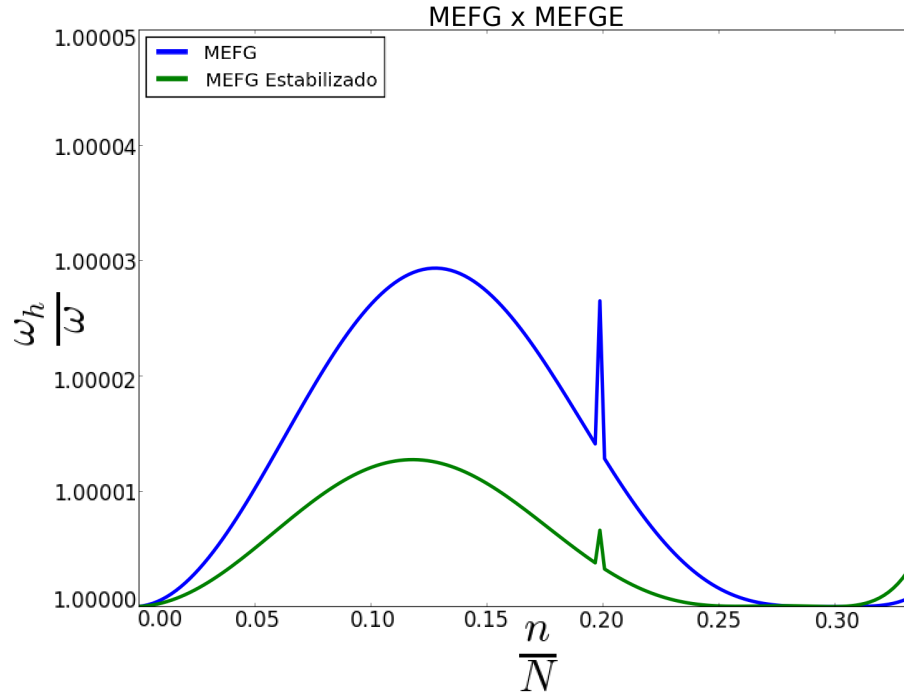


Figura 29- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 1 nível de enriquecimento.

Visando permitir correlações entre o comportamento das aproximações e o condicionamento das matrizes envolvidas, a tabela 1 apresenta os números de condição (indicadores de condicionamento) das matrizes de massa e de rigidez das duas abordagens de enriquecimento. Com a escolha apropriada para as normas das matrizes, o número de condição k pode ser calculado como a relação entre o menor autovalor (λ_{\min}) e o maior autovalor (λ_{\max}). Dessa forma, o número de condição é dado por:

$$k = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (146)$$

Tabela 1- NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFG x MEFGE - 1 NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO

Matriz	MEFG	MEFGE
K	$7,953 \times 10^3$	$6,830 \times 10^3$
M	$2,111 \times 10^4$	$2,059 \times 10^4$

O exemplo 6.10 apresentou a aplicação de um nível de enriquecimento do MEFG e da estratégia de estabilização decorrente da adaptação da proposta o MEFGE à análise dinâmica. Como pode ser observado na figura 28, os espectros de frequência diferem suavemente. Para as frequências mais elevadas, o MEFG apresentou melhores resultados. No entanto, como pode ser observado na figura 29, para as primeiras frequências, a aplicação do MEFGE resultou em maior acurácia.

Naturalmente, a diferença de aproximação pode ser atribuída à mudança, mesmo que sutil, no espaço de aproximação. Porém, não foram incorporadas funções de outra natureza, mantendo-se a proposta trigonométrica. Dessa forma, supõe-se que houve influência das características de condicionamento numérico na solução do problema. De fato, como aponta a tabela 1, houve redução do número de condição da matriz de rigidez, como era esperado, dados os resultados do MEFGE tradicional. No entanto, não houve redução significativa do número de condição da matriz de massa.

Com o intuito de observar a progressão do comportamento da proposta de estabilização, a medida que se efetua o refino p (enriquecimentos sucessivos), apresenta-se o exemplo 6.11.

Exemplo 6.11. Considere-se o exemplo 6.10 sujeito a mais um nível de enriquecimento de MEFG e MEFGE. Os espectros de frequências normalizados resultantes são apresentados na figura 30.

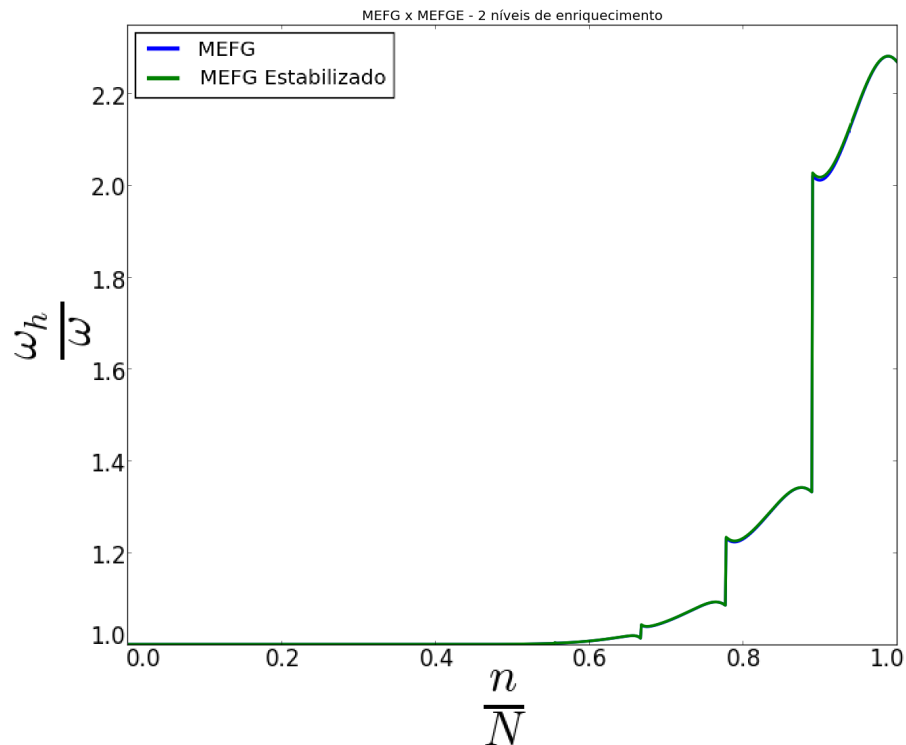


Figura 30- Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 2 níveis de enriquecimento.

A figura 31 representa os mesmos resultados da figura 30 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

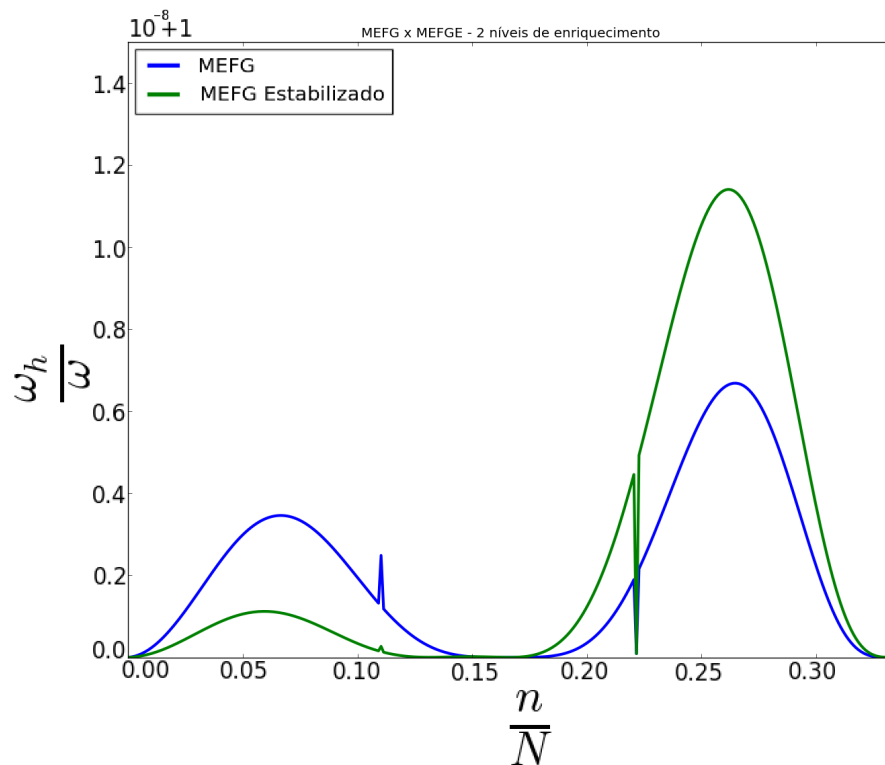


Figura 31- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 2 níveis de enriquecimento.

Visando permitir correlações entre o comportamento das aproximações e o condicionamento das matrizes envolvidas, a tabela 2 apresenta os números de condição das matrizes de massa e de rigidez das duas abordagens de enriquecimento.

Tabela 2- NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFG x MEFGE - 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

Matriz	MEFG	MEFGE
K	$2,711 \times 10^6$	$2,665 \times 10^6$
M	$3,276 \times 10^8$	$2,500 \times 10^8$

O exemplo 6.11 apresentou a aplicação do segundo nível de enriquecimento para ambas abordagens. A figura 30 exibe os espectros de frequência resultantes e é possível observar que ambas abordagens tem comportamento razoavelmente próximo. Mudando a escala de

observação, é possível observar na figura 31, que a tendência de maior acurácia do MEFGE para as primeiras frequências se manteve.

Diferentemente do exemplo 6.10, a tabela 2 mostra que a redução do número de condição da matriz de rigidez foi suave enquanto que houve uma redução maior do número de condição da matriz de massa. Neste contexto, é válido ressaltar que a aplicação de enriquecimentos sucessivos do MEFGE necessita de maiores estudos, principalmente levando-se em consideração o trabalho de Zhang *et al.* (2014).

Exemplo 6.12. Considere-se agora o exemplo 6.11 sujeito a mais um nível de enriquecimento de ambas alternativas. Os espectros de frequências normalizados resultantes são apresentados na figura 32.

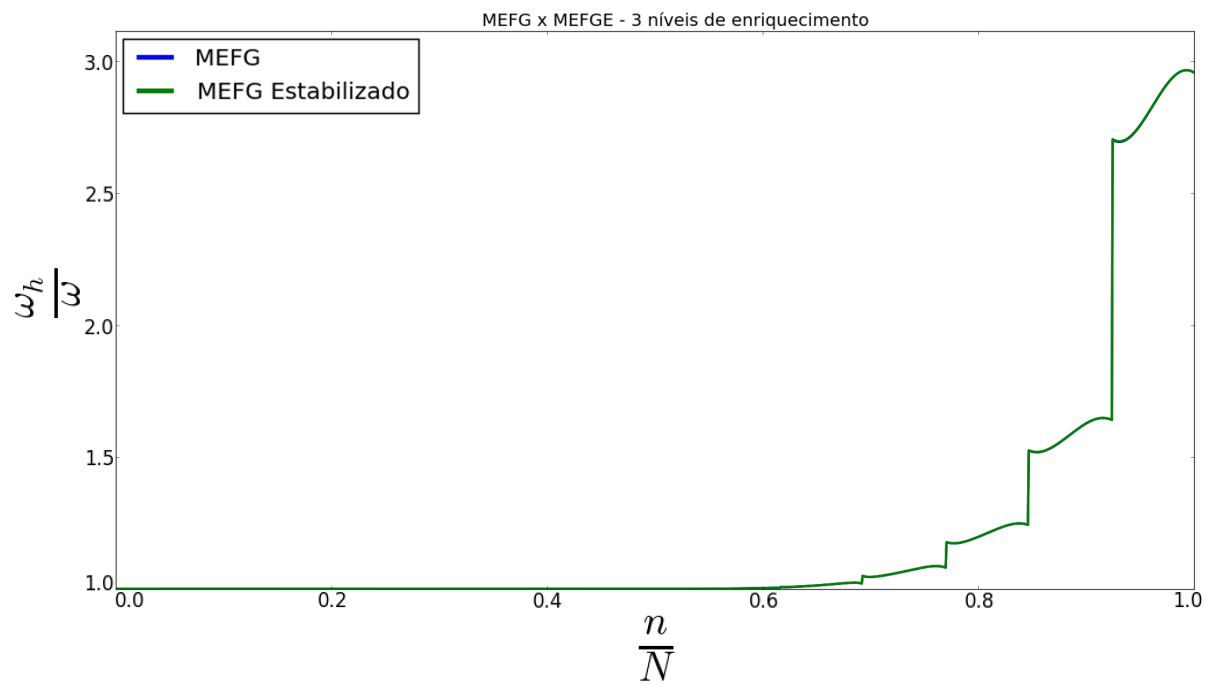


Figura 32- Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 3 níveis de enriquecimento.

A figura 33 representa os mesmos resultados da figura 32 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

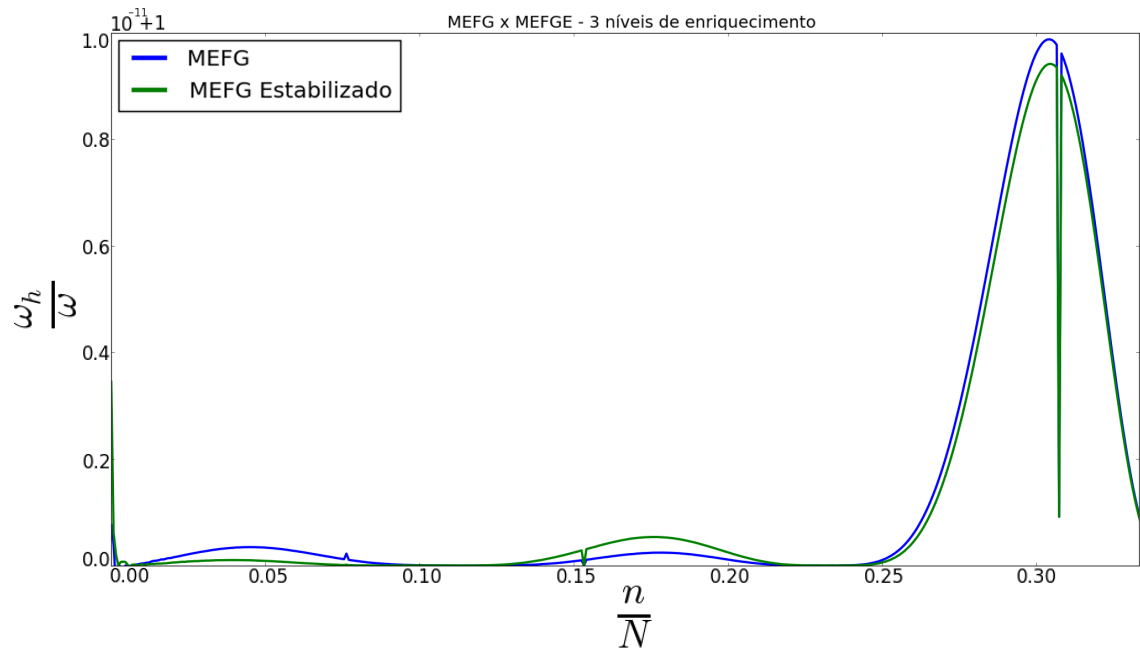


Figura 33- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 3 níveis de enriquecimento.

Visando permitir correlações entre o comportamento das aproximações e o condicionamento das matrizes envolvidas, a tabela 3 apresenta os números de condição das matrizes de massa e de rigidez das duas abordagens de enriquecimento.

Tabela 3- NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFG x MEFGE - 3 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

Matriz	MEFG	MEFGE
K	$3,883 \times 10^{10}$	$3,883 \times 10^{10}$
M	$5,182 \times 10^{12}$	$3,702 \times 10^{12}$

O exemplo 6.12 apresentou a aplicação do terceiro nível de enriquecimento para ambas abordagens. A figura 32 exibe os espectros de frequência resultantes e é possível observar que ambas abordagens apresentam um comportamento ainda mais próximo. Mudando a escala de observação, a figura 33 destaca que a tendência de maior acurácia do MEFGE para as primeiras frequências se mantém.

A tabela 3 mostra que já não se encontra mais diferença significativa do número de condição da matriz de rigidez e que manteve uma certa redução número de condição da matriz de massa. Dando continuidade ao processo de refino p , apresenta-se o exemplo 6.13.

Exemplo 6.13. Considere-se agora o exemplo 6.12 sujeito ao quarto nível de enriquecimento do MEFG e MEFGE. Os espectros de frequências normalizados resultantes são apresentados na figura 34.

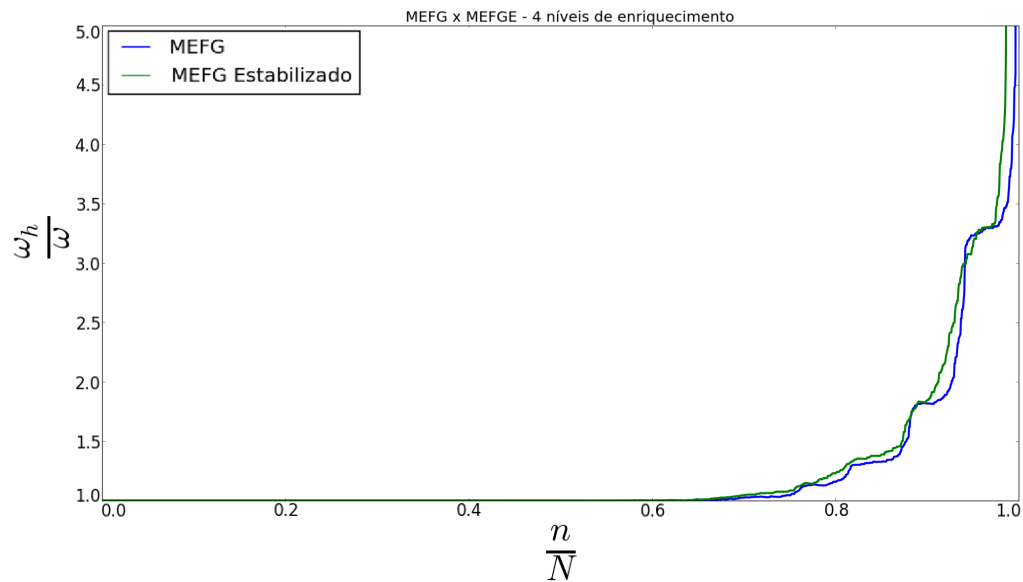


Figura 34- Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 4 níveis de enriquecimento.

A figura 35 representa os mesmos resultados da figura 34 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

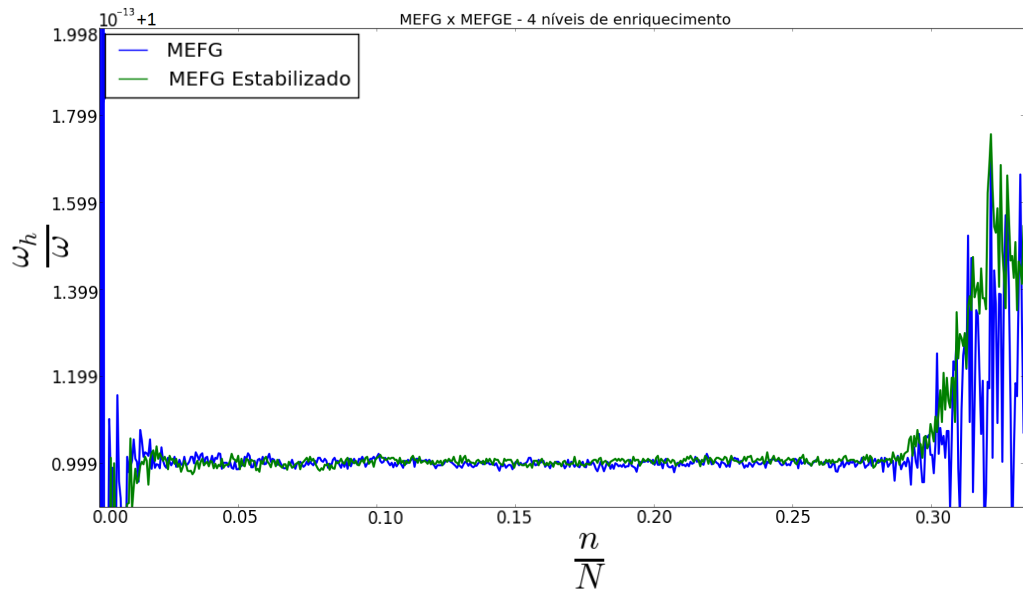


Figura 35- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x MEFGE - 4 níveis de enriquecimento.

Visando permitir correlações entre o comportamento das aproximações e o condicionamento das matrizes envolvidas, a tabela 4 apresenta os números de condição das matrizes de massa e de rigidez das duas abordagens de enriquecimento.

Tabela 4- NÚMEROS DE CONDIÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - MEFGE x MEFGE - 4 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

Matriz	MEFG	MEFGE
K	$7,997 \times 10^{12}$	$7,901 \times 10^{12}$
M	$3,115 \times 10^{18}$	$4,763 \times 10^{18}$

O exemplo 6.13 apresentou os resultados para o 4º nível de enriquecimento trigonométrico. A figura 34 mostra a tendência de grande acurácia para boa parte do espectro de frequências ao custo de uma deterioração da resposta para o trecho final do espectro.

A figura 35 destaca o efeito da instabilidade numérica na aplicação do MEFGE e da estratégia de estabilização baseada no MEFGE. Analisando os números de condição das matrizes apresentados na tabela 4, nota-se que não a diminuição do número de condição da matriz de rigidez é pequena e, por sua vez, o condicionamento da matriz de massa é piorado com a aplicação do MEFGE proposto.

É possível notar que, apesar do aumento progressivo da acurácia a cada aplicação dos níveis de enriquecimento, como pode ser observado nos exemplos apresentados, há uma crescente deterioração da estabilidade do problema. Com o intuito de investigar esse comportamento progressivo, apresenta-se o exemplo 6.14, que ilustra essa observação.

Exemplo 6.14. *Aplicando sucessivamente o processo de enriquecimento trigonométrico e calculando as matrizes elementares analiticamente, os números de condição das matrizes de massa e rigidez elementares restringidas são calculadas e apresentadas na figura 36. Essa abordagem é equivalente a aproximação feita com uma malha de apenas um elemento.*

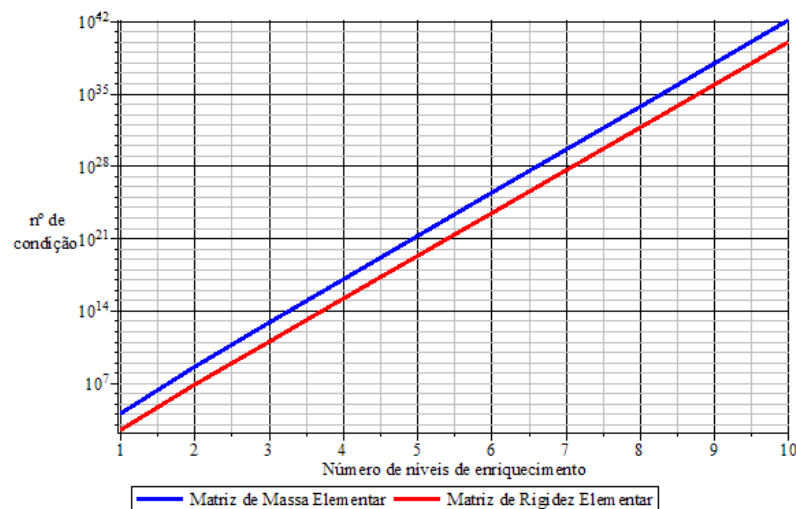


Figura 36- Números de condição das matrizes elementares do MEEG - 10 primeiros níveis de enriquecimento.

A figura 36 do exemplo 6.14 apresenta a evolução do número de condição das matrizes de massa e de rigidez, eliminando-se assim os efeitos da construção da matriz global. É importante destacar que o eixo vertical, correspondente aos números de condição calculados com precisão bastante elevada a partir de matrizes analíticas, está representado em escala logarítmica. Dessa forma, é possível ver que o crescimento do número de condição para ambas as matrizes tem tendência exponencial de crescimento. Esse comportamento explica o aumento da instabilidade numérica no processo de enriquecimento sucessivo.

A proposta de aplicação do MEEGE à dinâmica resultou melhores resultados para a aproximação de frequências mais baixas, como observado nos exemplos apresentados. No entanto, o problema de instabilidade numérica não foi resolvido satisfatoriamente. Assim, apresenta-se a seguir uma outra estratégia de estabilização do processo de enriquecimento sucessivo para a análise dinâmica.

6.1.1.4 MODIFICAÇÃO HEURÍSTICA DO ENRIQUECIMENTO

Os exemplos de refino p das seções anteriores serão revistos com o enfoque da modificação heurística do parâmetro enriquecimento, visando estudar o comportamento do espectro de frequências e o condicionamento das matrizes envolvidas. Serão apresentados os espectros de frequências normalizados e, por fim, um exemplo com os números de condicionamento das matrizes de massa e rigidez para as duas abordagens. Conforme explicado na seção 5.2, o 1º nível do MEEG e da Modificação Heurística coincidem e, sendo assim, os exemplos partem do 2º nível de enriquecimento.

Exemplo 6.15. Considere-se o problema de vibração livre do exemplo 6.1 e enriquecimento da PU Lagrangeana Linear de duas formas: MEFG conforme os exemplos 6.10, 6.11, 6.12 e 6.13; e a Modificação Heurística do parâmetro beta ($\beta_1 = \frac{3\pi}{4}$) conforme metodologia descrita. Os espectros de frequências normalizados resultantes são apresentados na figura 37.

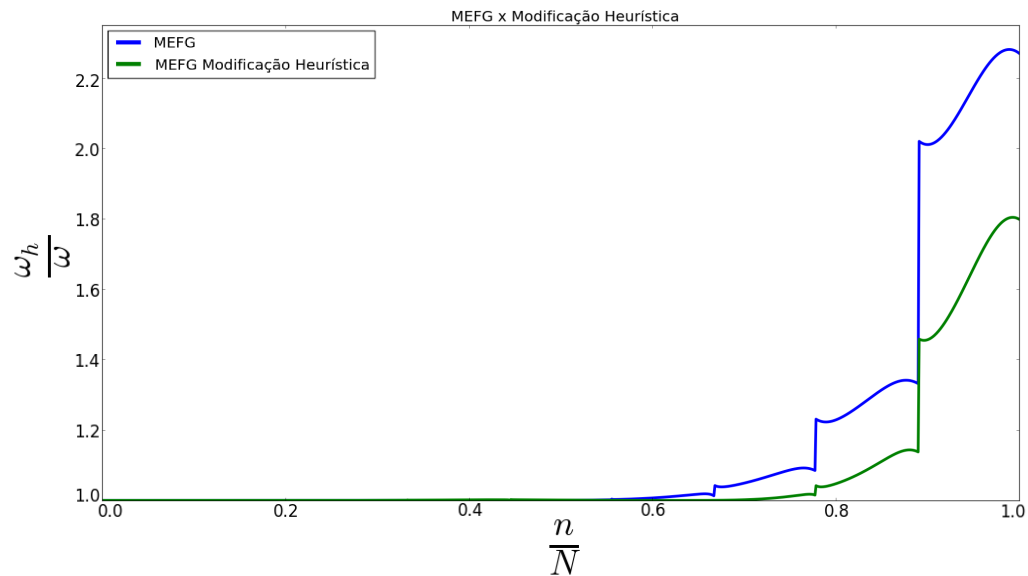


Figura 37- Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 2 níveis de enriquecimento.

A figura 38 representa os mesmos resultados da figura 37 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

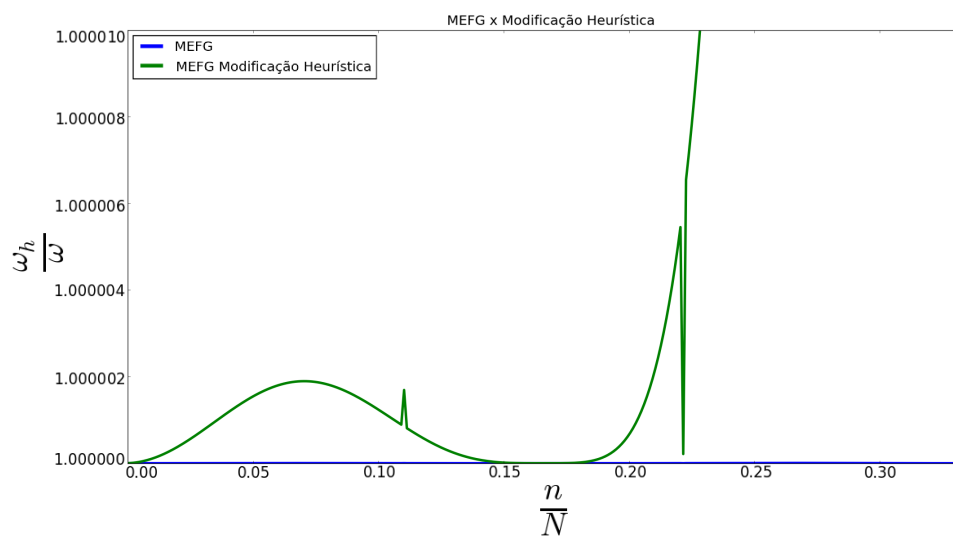


Figura 38- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 2 níveis de enriquecimento.

O exemplo 6.15 apresentou a aplicação de dois níveis de enriquecimento utilizando o MEFG com a evolução clássica do parâmetro β e com a variação denominada de Modificação Heurística.

Como pode ser observado na figura 37, a modificação proposta impacta positivamente o resultado da aproximação feita pelo MEFG para frequência mais elevadas. Os erros no trecho final do espectro são significativamente diminuídos para a aplicação de dois níveis de enriquecimento. No entanto, para as frequências iniciais há perda de acurácia como pode ser observado na figura 38, apesar de os erros continuarem razoavelmente baixos, na ordem de 10^{-7} .

Exemplo 6.16. Considere-se o exemplo 6.15 sujeito a mais um nível de enriquecimento de ambas alternativas. Os espectros de frequências normalizados resultantes são apresentados na figura 39.

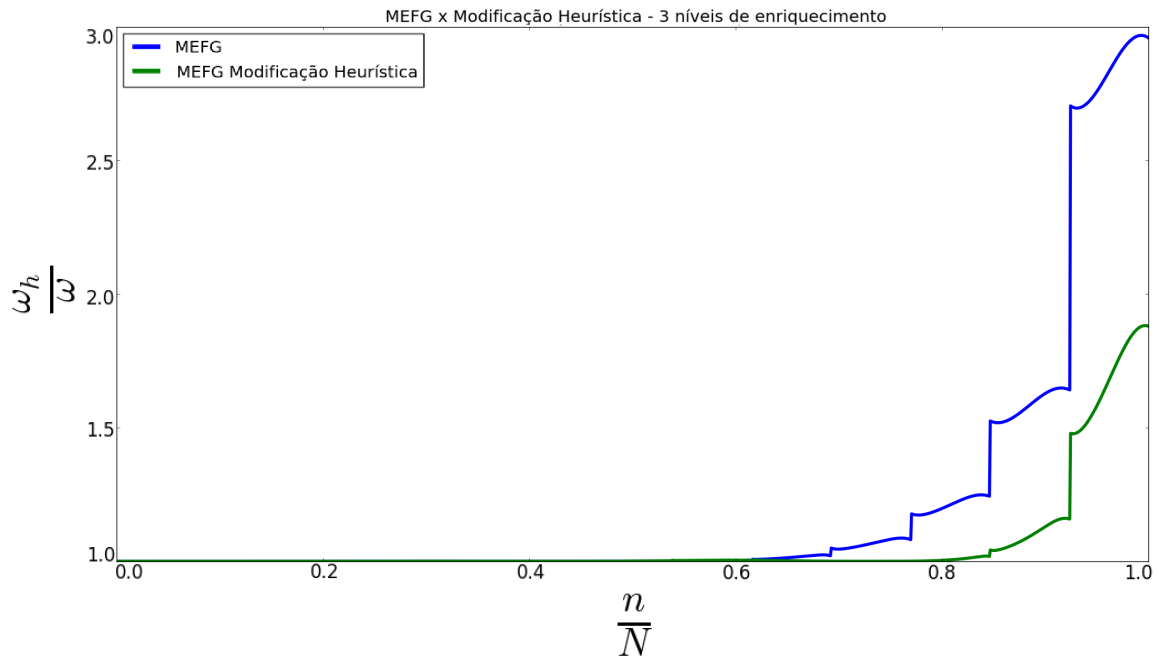


Figura 39- Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 3 níveis de enriquecimento.

A figura 40 representa os mesmos resultados da figura 39 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

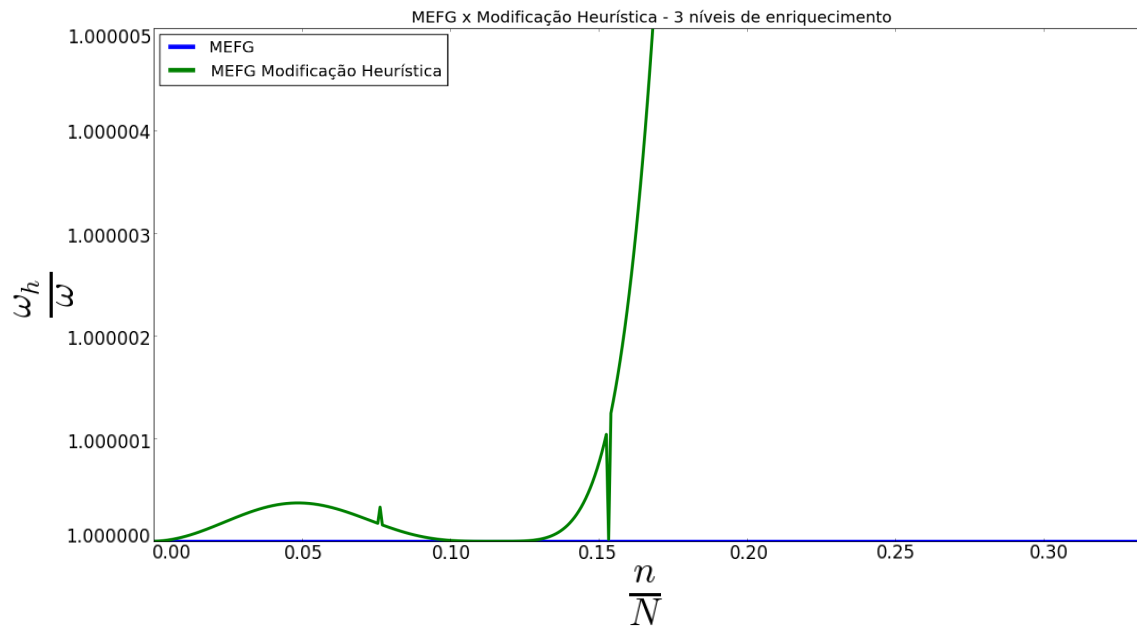


Figura 40- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 3 níveis de enriquecimento.

O exemplo 6.16 apresentou a aplicação de mais um nível de enriquecimento para ambas abordagens, resultando nos espectros apresentados na figura 39.

A separação entre os trechos finais dos espectros relativos as duas abordagens de aproximação aumenta, conforme é mostrado na figura 39. De fato, a acurácia do espectro da Modificação Heurística é mantida até frequências mais elevadas (acima de 80% do espectro) enquanto que o MEFG com a variação clássica conserva bons resultados até cerca de 70% do espectro. Esse ganho, no entanto, vem ao custo de perda de acurácia para as primeira frequências, como destaca a figura 40.

Exemplo 6.17. Considerando-se o exemplo 6.16 sujeito a mais um nível de enriquecimento de ambas alternativas. Os espectros de frequências normalizados resultantes são apresentados na figura 41.

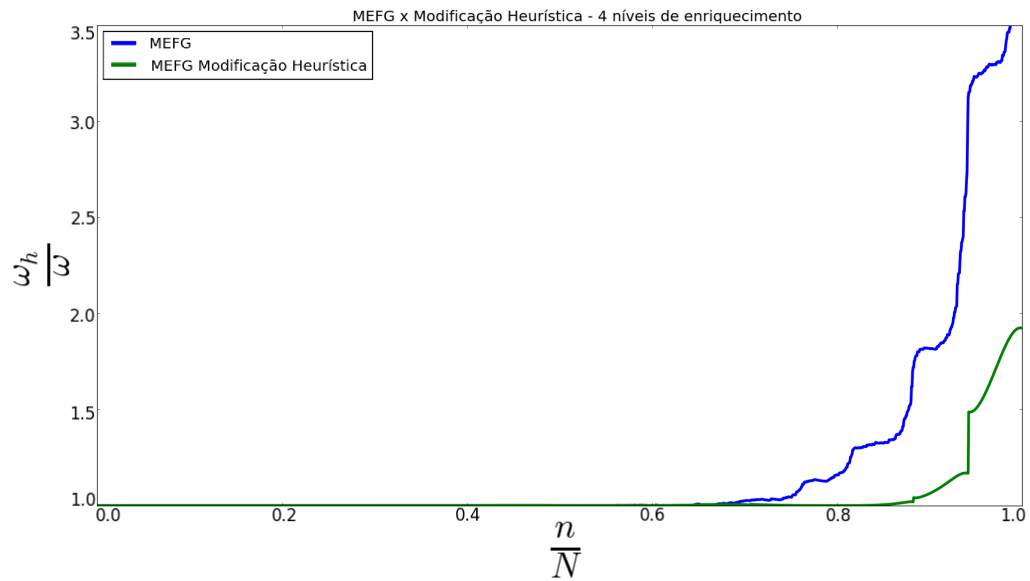


Figura 41- Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 4 níveis de enriquecimento.

A figura 42 representa os mesmos resultados da figura 41 focando no primeiro terço do espectro de frequências para melhorar a visualização e destacar as diferenças de comportamento local.

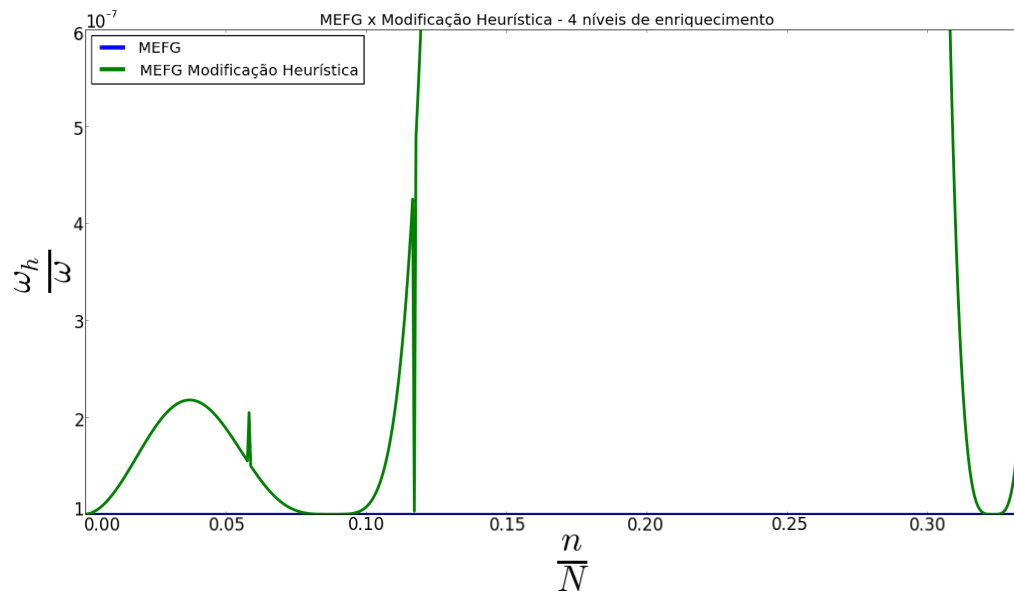


Figura 42- Primeiro terço do Espectro de Frequências - MEFG x Modificação Heurística - 4 níveis de enriquecimento.

O exemplo 6.17 apresentou a aplicação de mais um nível de enriquecimento para ambas abordagens, chegando-se ao 4º nível de enriquecimento. Assim como observados nos exemplos 6.9 e 6.13, aplicação de quatro níveis de enriquecimento implica em instabilidade e esse

resultado está presente também na figura 41.

Por outro lado, a figura 41 também mostra o comportamento estável da Modificação Heurística, que manteve resultados coerentes e ainda melhorou a aproximação em termos do espectro de frequências. Pode-se observar que a aproximação manteve acurácia até cerca de 90% do espectro, enquanto que o MEFG clássico divergiu na aproximação das últimas frequências. Seguindo a tendência dos exemplos apresentados anteriormente, o ganho em acurácia para o trecho final do espectro e em estabilidade custou perda de acurácia na aproximação das primeiras frequências.

Com o intuito de analisar os impactos na estabilidade do problema, apresenta-se o exemplo 6.18 que, analogamente ao exemplo 6.14, mostra a evolução dos números de condição das matrizes de massa e de rigidez.

Exemplo 6.18. *Aplicando-se sucessivamente o processo de enriquecimento trigonométrico, com a formulação clássica e com a modificação heurística, e calculando-se as matrizes elementares analiticamente, tem-se os números de condição das matrizes de massa e rigidez elementares restringidas apresentados na figura 43. Essa abordagem é equivalente a aproximação feita com uma malha de apenas um elemento.*

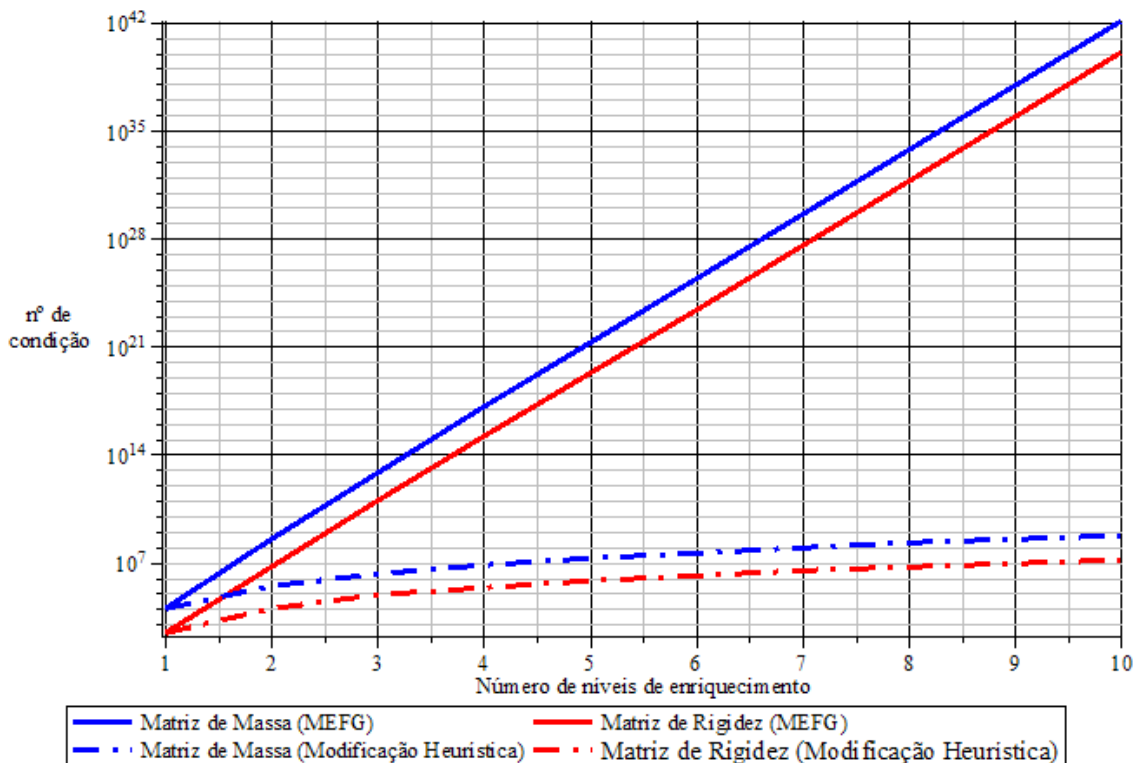


Figura 43- Números de condição das matrizes elementares do MEFG - 10 primeiros níveis de enriquecimento.

A figura 43 apresentada no exemplo 6.18 mostra que a evolução do número de condição das matrizes geradas pela Modificação Heurística é consideravelmente aquém da decorrente do enriquecimento trigonométrico sucessivo clássico. Consequentemente, o ganho em estabilidade é notável para o processo de refino p , como é demonstrado no exemplo 6.19.

Exemplo 6.19. *Considere-se o problema de vibração livre do exemplo 6.1 e enriquecimento da PU Lagrangeana Linear e a Modificação Heurística do parâmetro beta conforme metodologia descrita. Os espectros de frequências normalizados resultantes de 5, 10, 25 e 50 níveis de enriquecimento são apresentados na figura 44, ilustrando a estabilidade da proposta. Diferentemente dos exemplos anteriores, para esse exemplo foi adotada uma malha de apenas 5 elementos finitos.*

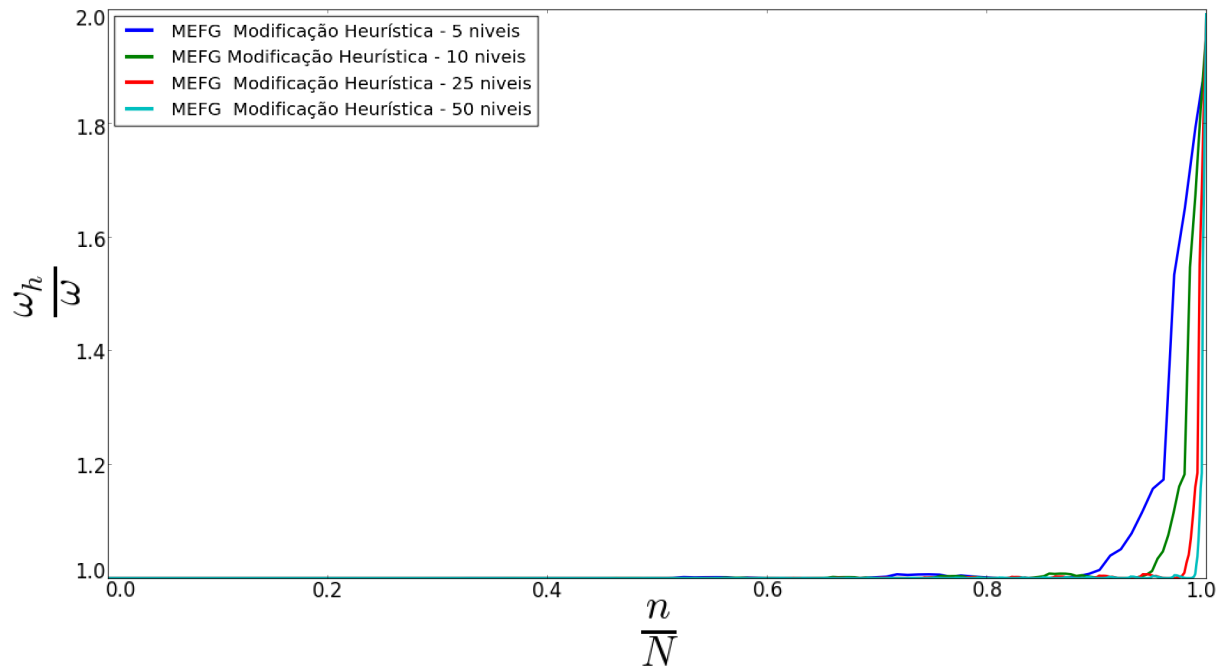


Figura 44- Espectro de Frequências - Modificação Heurística - 5, 10, 25 e 50 níveis de enriquecimento.

A figura 45 mostra os mesmos resultados apresentados na figura 44, apenas restringido o eixo vertical para erros abaixo de 1%.

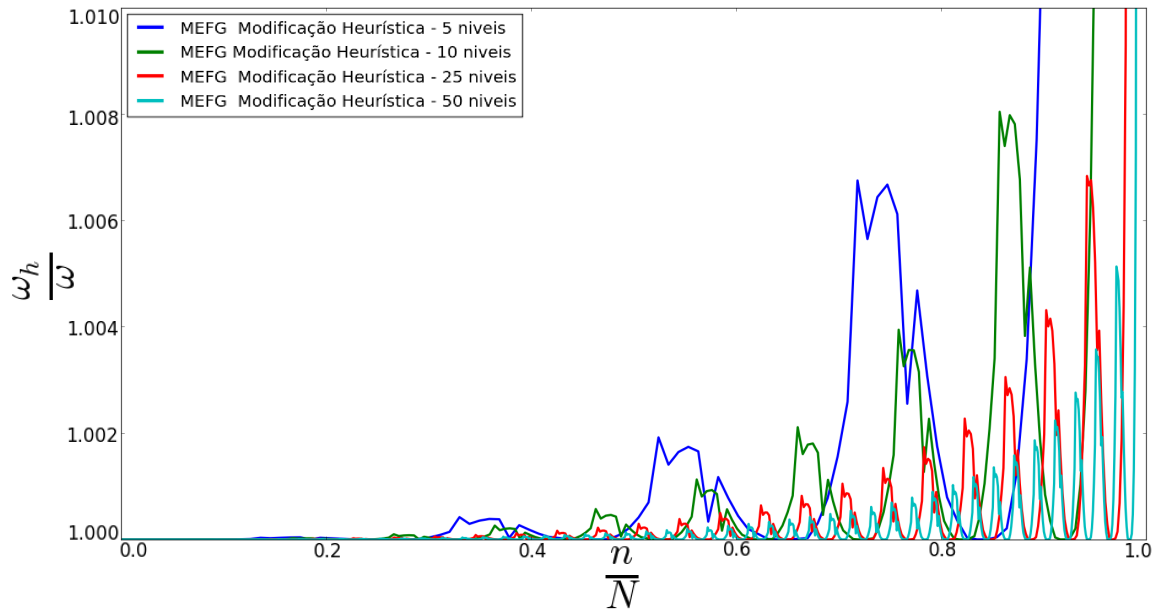


Figura 45- Espectro de Frequências - Modificação Heurística - 5, 10, 25 e 50 níveis de enriquecimento (Erros abaixo de 1%).

O exemplo 6.19 leva o refino p até 50 níveis de enriquecimento visando ilustrar a estabilidade da proposta. A figura 44 mostra a tendência de convergência do espectro, melhorando hierarquicamente a acurácia das últimas frequências. Tem-se, por exemplo, 98% das frequências aproximadas com boa acurácia (abaixo de 1% de erro) para o caso de 50 níveis de enriquecimento, como mostrado pela figura 45.

6.1.2 ANÁLISE TRANSIENTE

O enriquecimento trigonométrico no contexto do MEFG aplicado à análise transiente unidimensional foi abordada anteriormente por Torii (2012) e Shang (2014) contemplando diversos exemplos. Nessa seção se dará continuidade à discussão apresentando a aplicação do refino p com as propostas de estabilização expostas na seção anterior em três exemplos elucidativos. Alternativas de estabilização na análise transiente, como o HHT utilizado por Shang (2014), foram evitadas com o intuito de manter a análise voltada às interações do processo de enriquecimento e as propostas do presente trabalho.

Para os exemplos seguintes, a análise transiente se resumiu na aplicação do Método de Newmark utilizando as matrizes de massa e rigidez geradas pela aplicação do MEFG com as diferentes abordagens. Foram adotados parâmetros unitários ($\sqrt{\frac{E}{\rho}} = c = 1$) e uma malha uniforme de 20 elementos finitos. Para a discretização temporal, o intervalo de análise de 20 segundos foi analisando em 2000 passos de 10^{-2} segundos.

O modelo analisado nos três exemplos consiste em uma barra com uma extremidade engastada e a outra extremidade livre, onde é aplicado o carregamento, como mostrado na figura 46. Para as aplicações dos enriquecimentos trigonométricos foi adotado $\beta_1 = \frac{3\pi}{4}$, devido a boa performance dessa escolha nos exemplos de análise modal.

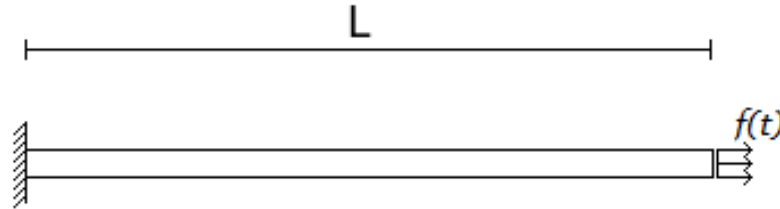


Figura 46- Barra engastada-livre sujeita a força dependente do tempo na extremidade.

Dessa forma, para cada exemplo é variado o formato de $f(t)$, contemplando três casos de carregamento:

- Força de Heaviside - Carregamento súbito que permanece ao longo do tempo (exemplo 6.20) e apresenta saltos na velocidade (MONTEIRO, 2009)
- Força de impulso - Carregamento de curtíssima duração (exemplo 6.21) e apresenta grande gradiente de deslocamentos (MONTEIRO, 2009)
- Descarregamento Exponencial - Carregamento com diminuição gradativa de intensidade ao longo do tempo (exemplo 6.22)

Os carregamentos são exemplificados na figura 47.

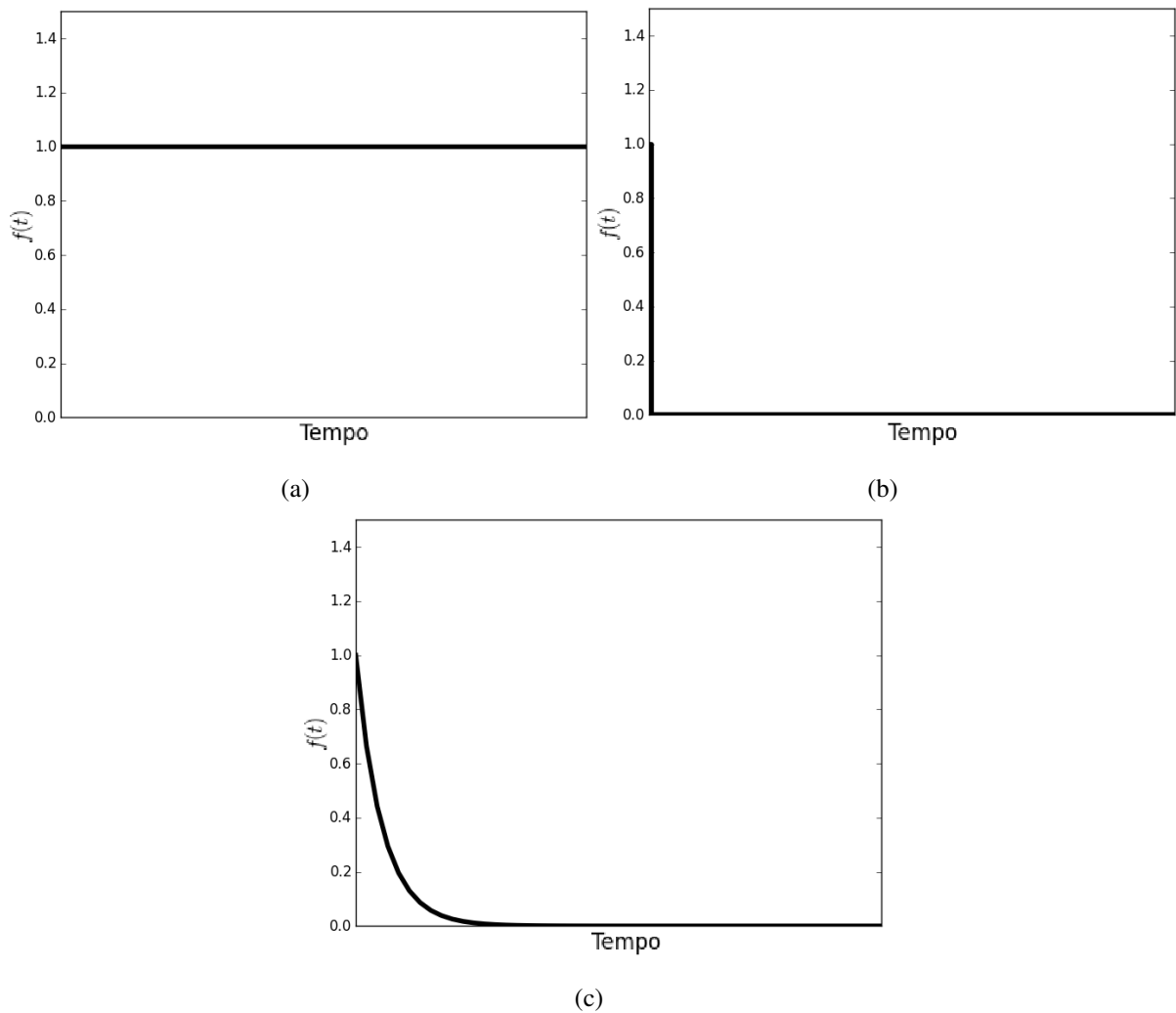
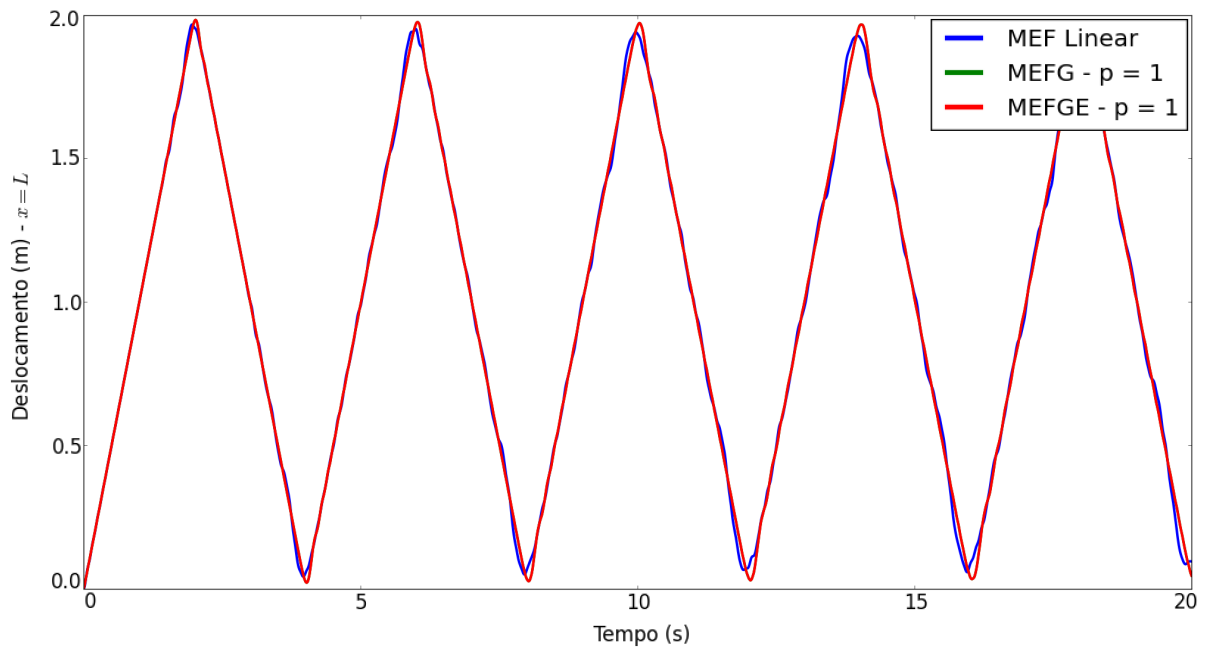


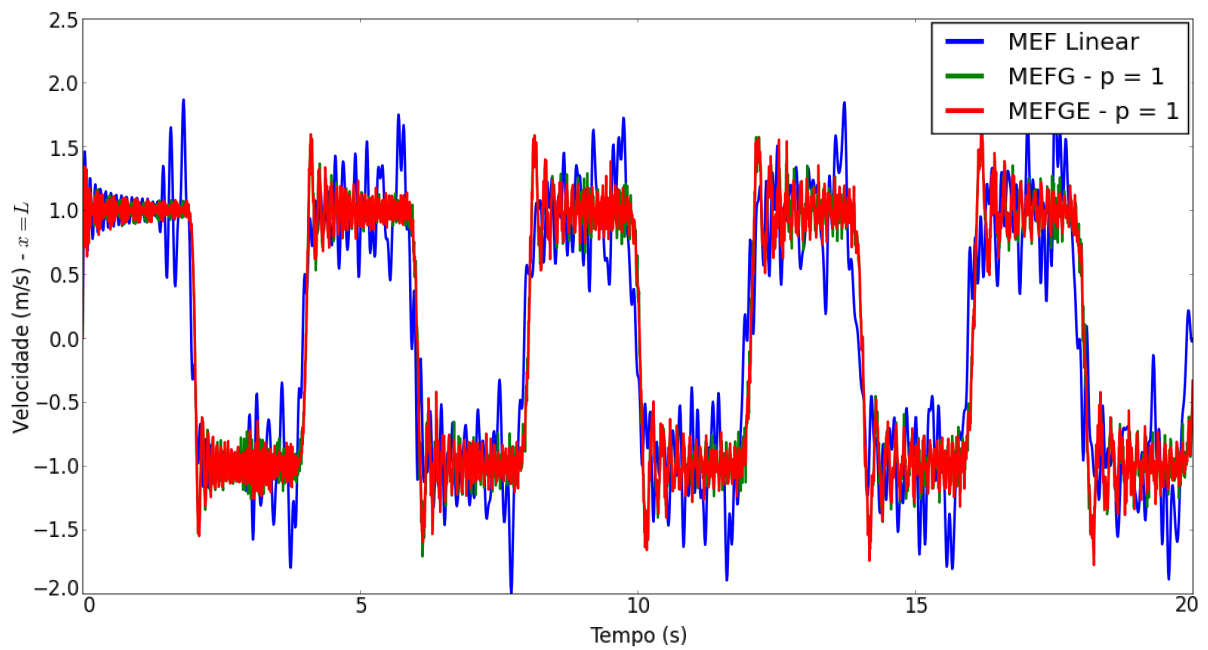
Figura 47- Análise transiente - (a) Força de Heaviside, (b) Força de impulso, (c) Descarregamento Exponencial.

Exemplo 6.20. *O carregamento externo é aplicado subitamente com valor igual a 1N e mantido até o final da análise, caracterizando uma força de Heaviside. Os gráficos de deslocamento e velocidade ao longo do tempo da extremidade livre são apresentados a seguir para diferentes estratégias de aproximação.*

A resposta transiente para a aproximação feita com MEF Linear, MEFG com 1 nível de enriquecimento e a adaptação do MEFGE à dinâmica é apresentada na figura 48.



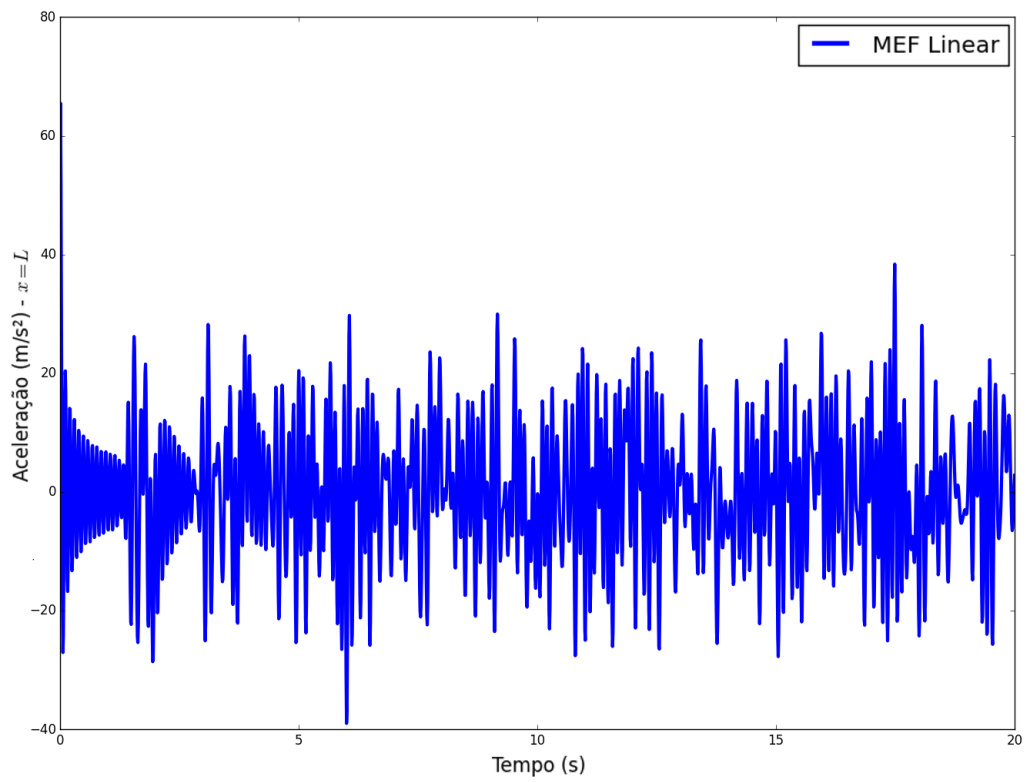
(a)



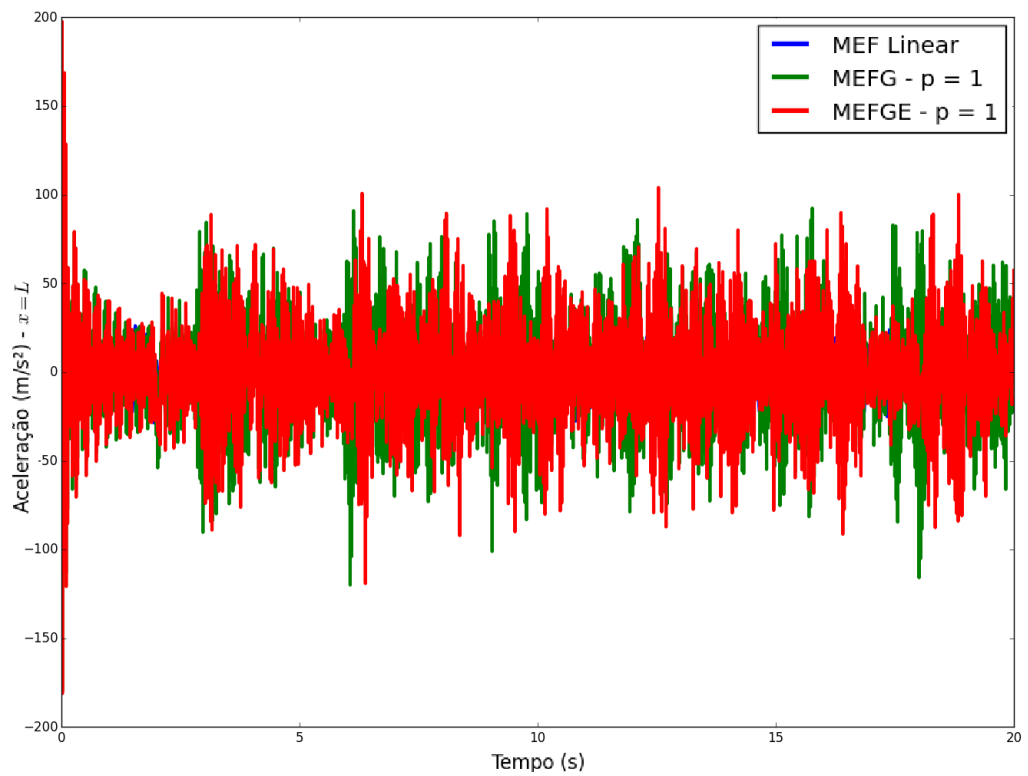
(b)

Figura 48- Análise transiente - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

Visando complementar a análise, apresentam-se os resultados correspondentes para aceleração na figura 49.



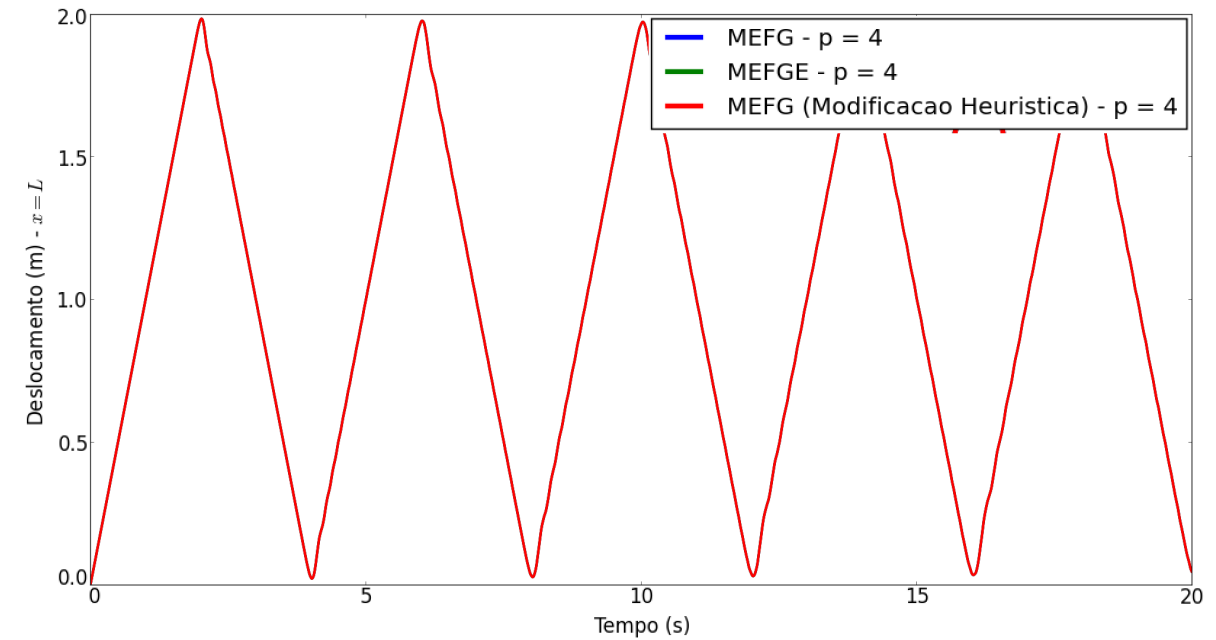
(a)



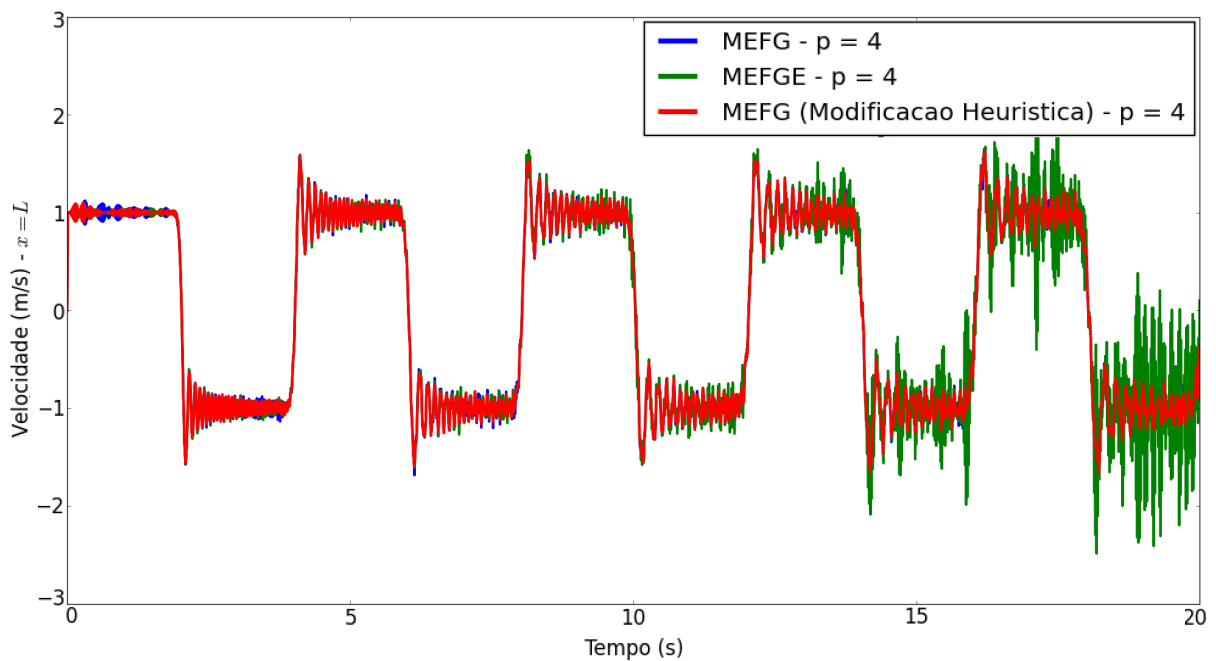
(b)

Figura 49- Análise transiente (refino p) - (a) Acelerações na extremidade livre (apenas MEF), (b) Acelerações na extremidade livre (MEF, MEFG e MEFGE).

O refino p é aplicado até 4 níveis de enriquecimento para as três abordagens: MEFG, MEFGE e Modificação Heurística. Os resultados são apresentados na figura 50.



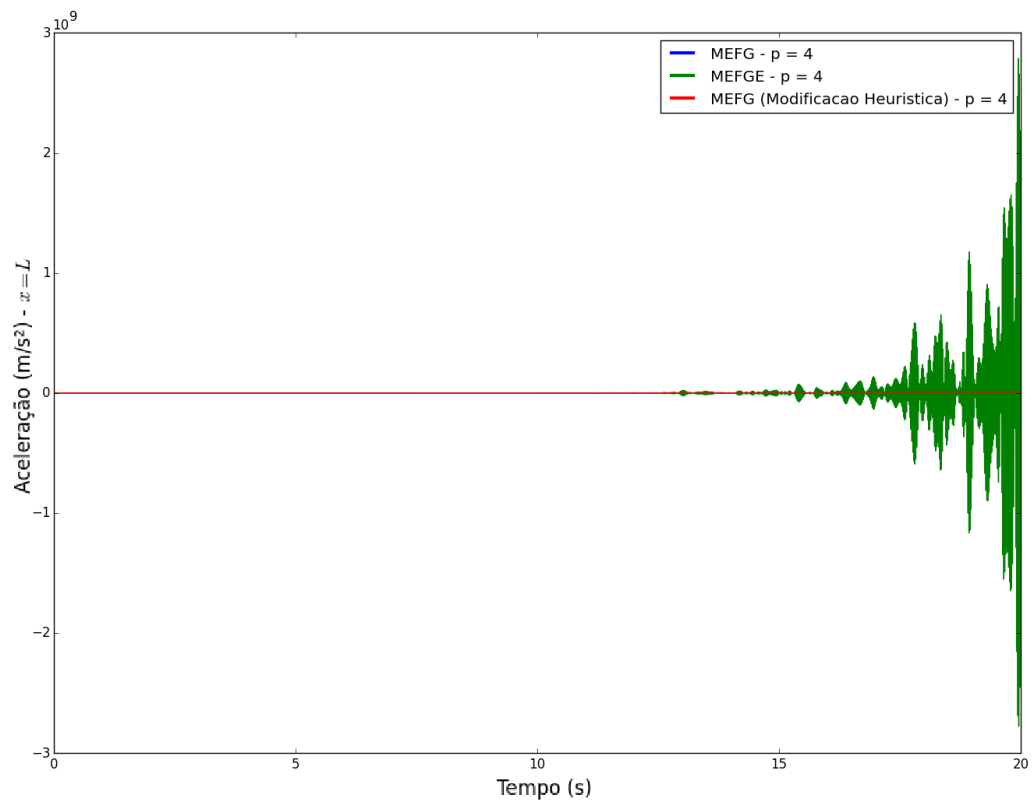
(a)



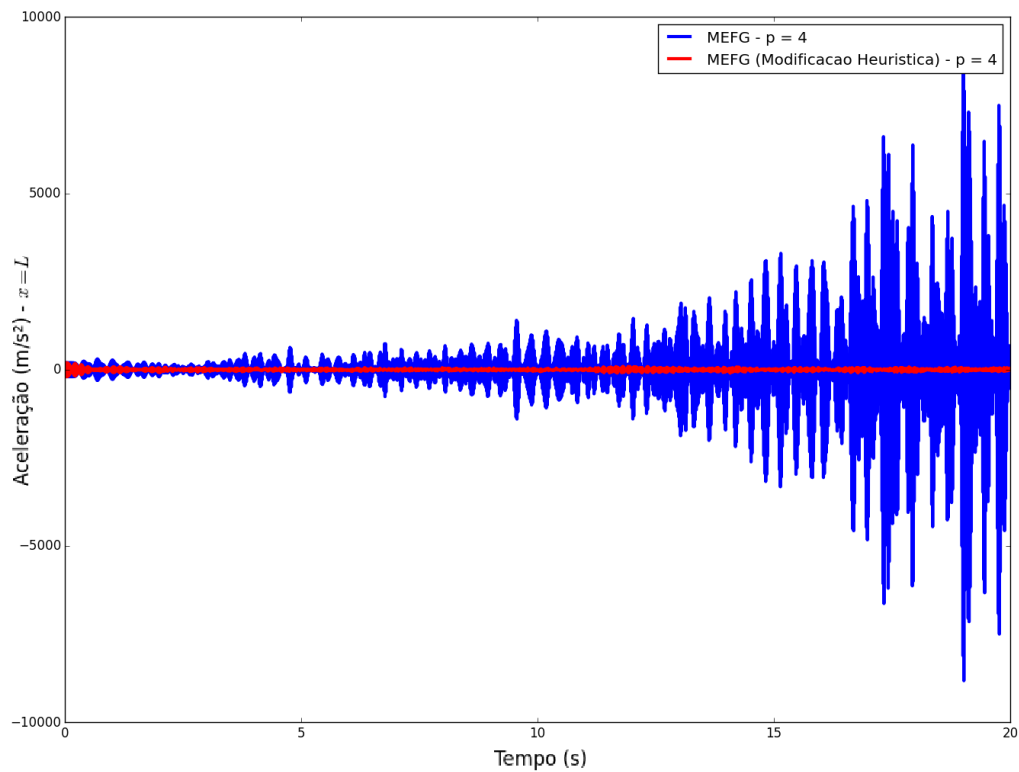
(b)

Figura 50- Análise transiente (refino p) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

Ainda com o refino p aplicado até 4 níveis de enriquecimento, são apresentados os resultados em termos de aceleração na figura 51.



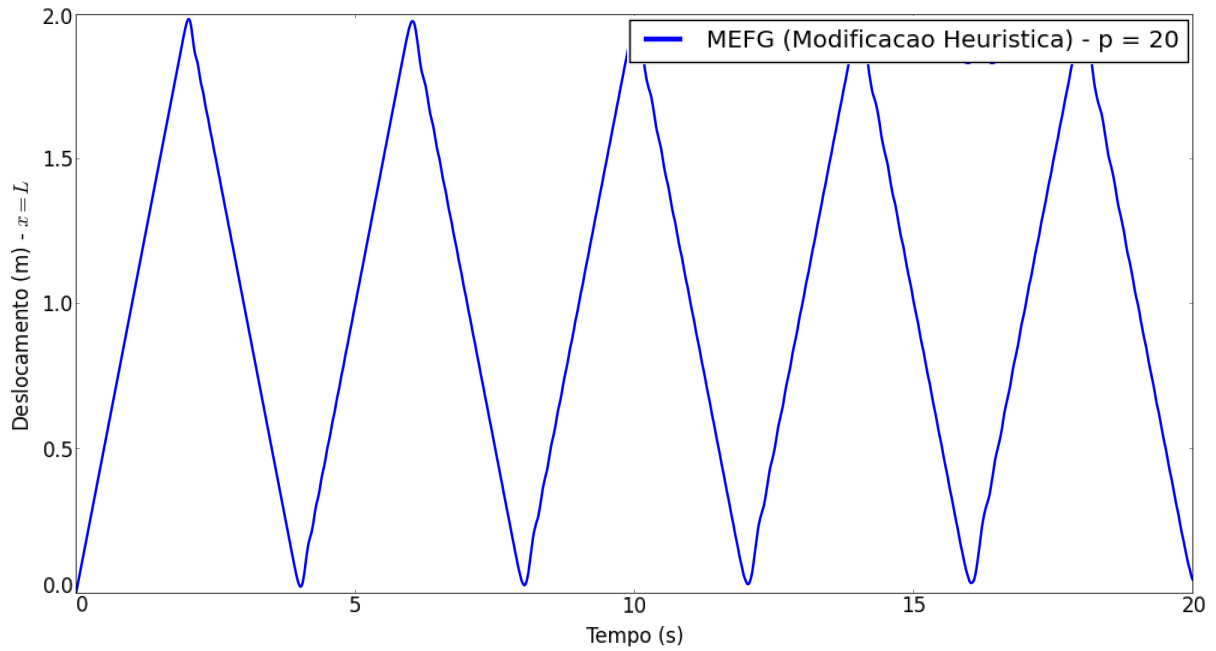
(a)



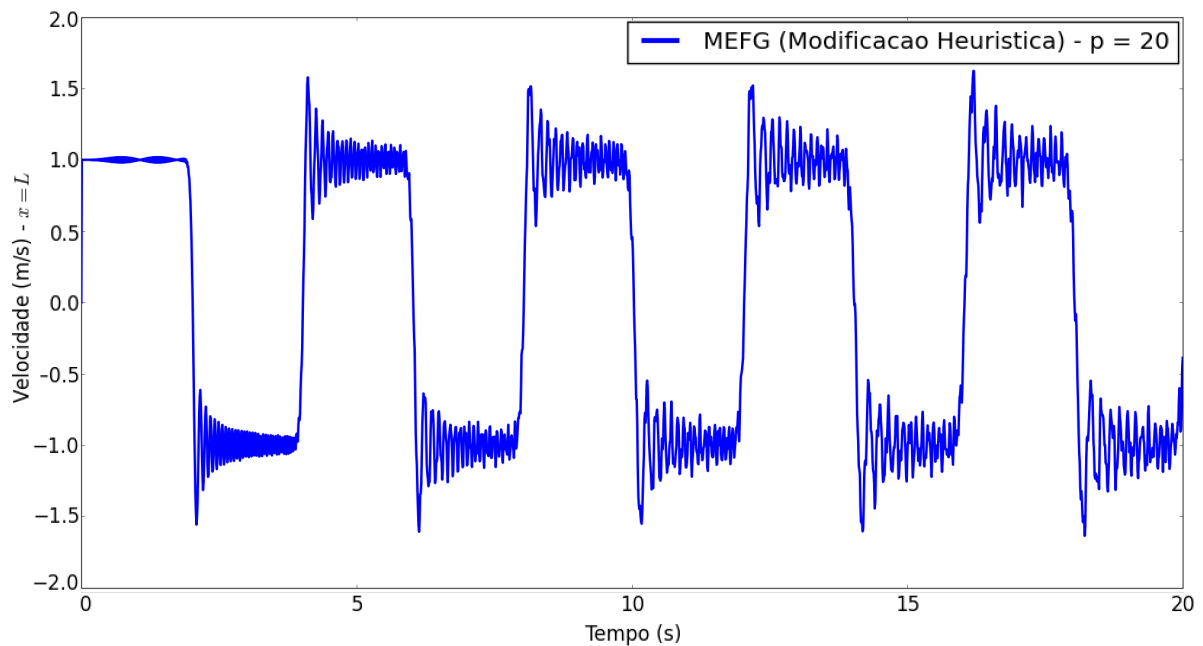
(b)

Figura 51- Análise transiente (refino p) - (a) Acelerações na extremidade livre (MEFG, MEFGE e Modificação Heurística), (b) Acelerações na extremidade livre (MEFG e Modificação Heurística).

Levando o refino p até alta ordem, visando destacar a estabilidade da proposta, tem-se os resultados apresentados na figura 52.



(a)



(b)

Figura 52- Análise transiente (refino p de alta ordem) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

Os resultados em termos de aceleração são apresentado na figura 53.

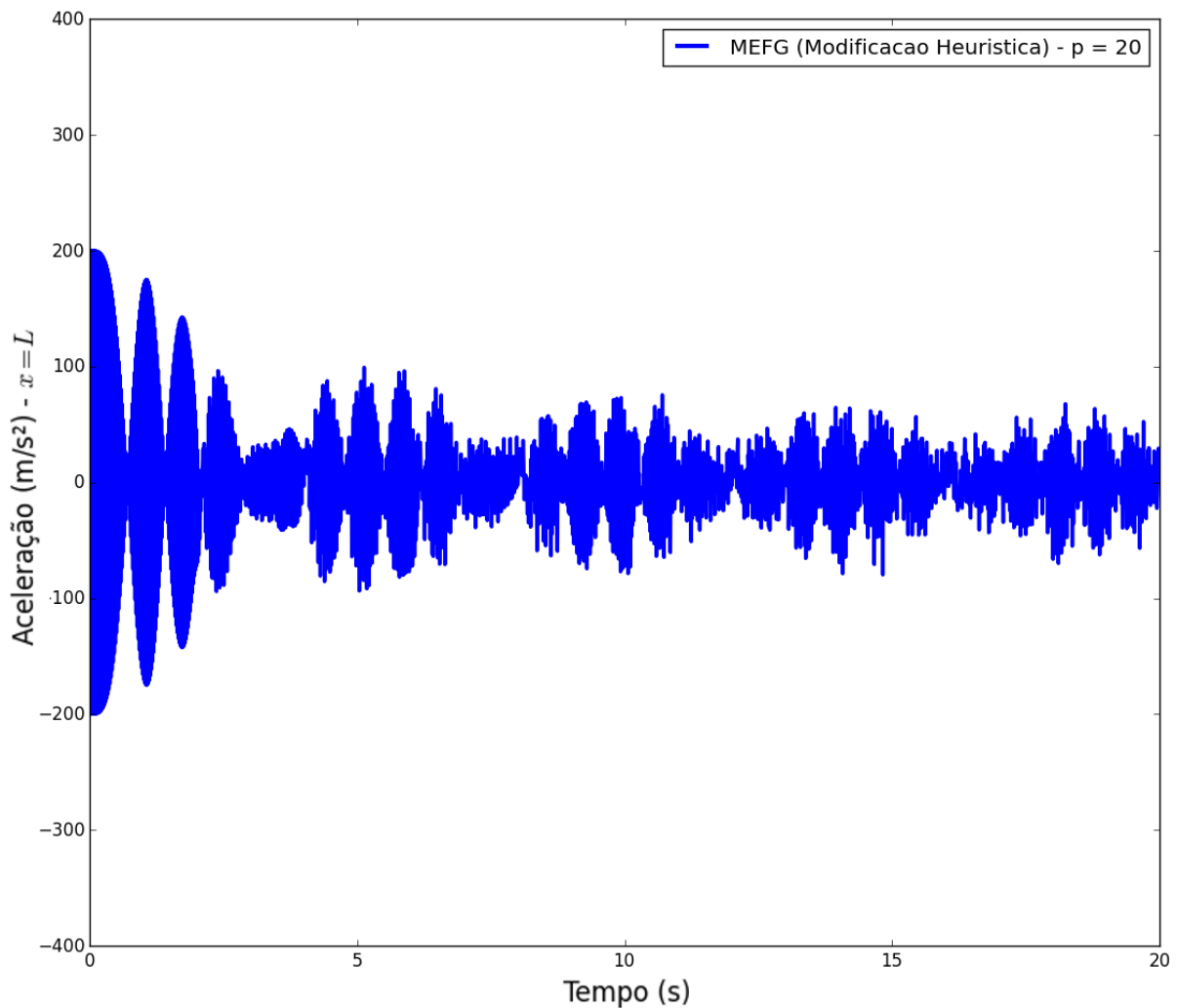


Figura 53- Análise transiente (refino p) - Acelerações na extremidade livre.

O exemplo 6.20 apresentou o estudo da aplicação de uma força unitária de Heaviside ao longo do tempo na extremidade da barra considerada. Primeiramente a aproximação foi feita pelo MEF Linear, pelo MEFG com 1 nível de enriquecimento e a estabilização correspondente do MEFGE. Como pode ser observado na figura 48, a resposta para deslocamentos é razoavelmente acurada, mesmo para o MEF Linear, enquanto que a resposta para velocidade apresenta grande perturbação, uma vez que esse tipo de carregamento gera um salto na velocidade ao longo tempo (MONTEIRO, 2009). É possível notar que, para a aproximação de velocidades, o MEFG possui uma resposta melhor comportada do que as outras duas alternativas. Em termos de aceleração, como mostrado na figura 49, as aproximações são espúrias para as três abordagens, uma vez que o campo de acelerações é consideravelmente difícil de ser aproximação por funções contínuas.

Levando o refino p até 4 níveis de enriquecimento, a figura 50 apresenta a comparação

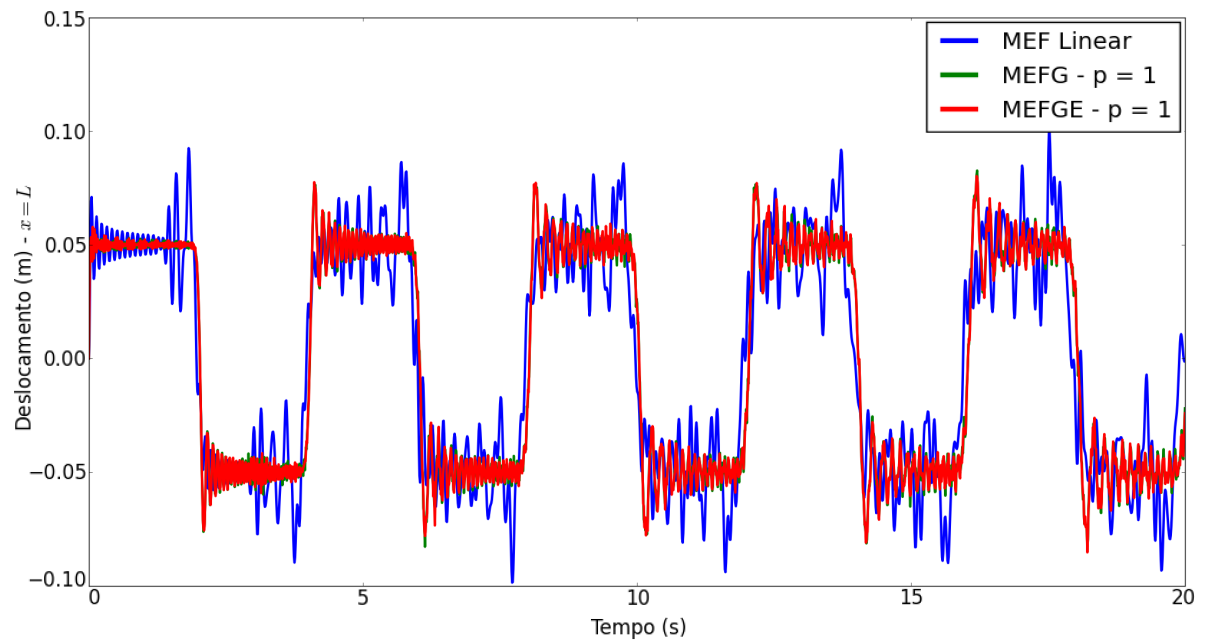
entre o MEFG, MEFGE e Modificação Heurística. As aproximações correspondentes para deslocamentos são consideravelmente próximas. No entanto, a resposta para velocidades apresenta comportamentos bastante distintos, sendo que a Modificação Heurística resultou em uma aproximação melhor comportada ao longo do tempo, ao ponto que o MEFGE tem sua resposta deteriorada rapidamente. Problemas de estabilidade numérica são ressaltados na aproximação do campo de acelerações apresentado na figura 51, onde é possível notar que o MEFGE tem sua resposta drasticamente deteriorada a medida que a análise avança no tempo. O MEFG também sofre significativa deterioração, porém mais limitada. Por sua vez, a Modificação Heurística demonstrou um comportamento mais estável, apesar de ter uma resposta com certa perturbação.

Testando a estabilidade da proposta de Modificação Heurística, a figura 52 mostra os resultados da aplicação de 20 níveis de enriquecimento. Aparentemente esse refino p de alta ordem não implicou em ganhos expressivos em acurácia, tanto para deslocamentos como para velocidades. No entanto, é válido ressaltar que a aplicação de diversos níveis de enriquecimento não comprometeu a estabilidade numérica da aproximação, seguindo a tendência apresentada na análise modal, inclusive para a resultados em termos de aceleração, como exposto na figura 53. A aplicação de um método de superposição modal pode tirar proveito dessas características ao extrair autovalores gerados pelas análise modal para construir a resposta transiente com menor esforço.

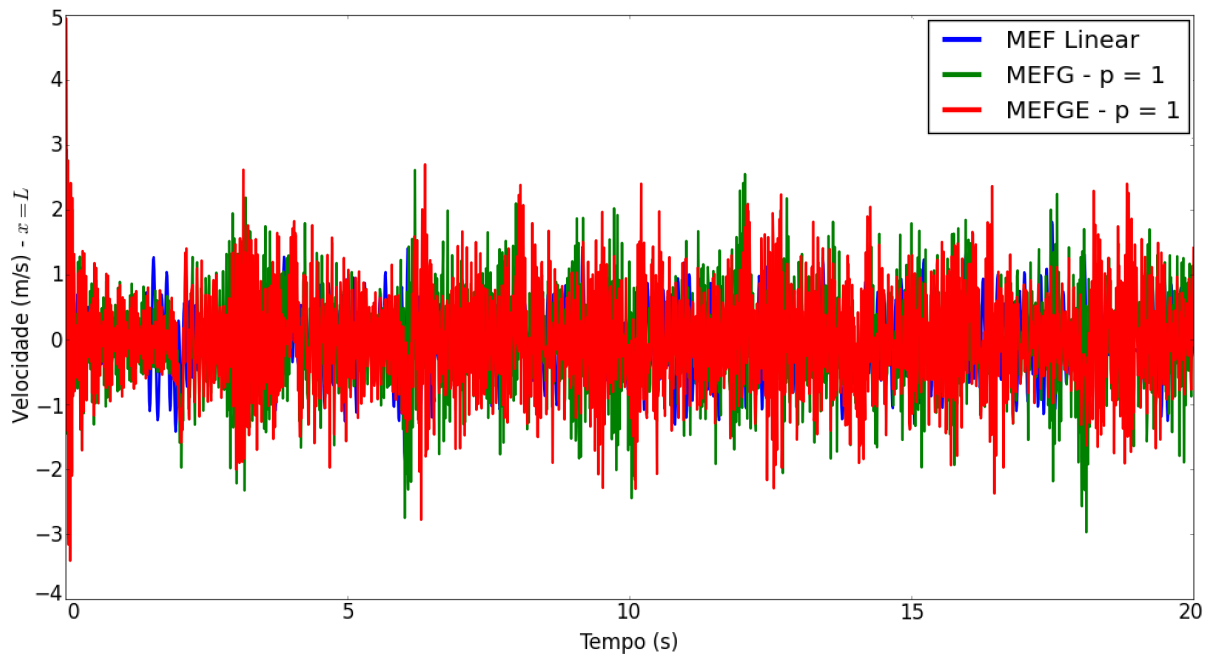
O campo de acelerações do exemplo 6.20 corresponde a segunda derivada do campo de deslocamentos que é de classe C^0 e, conseqüentemente, é descontínuo. Dessa forma, a dificuldade numérica de aproximação é considerável, visto que o modelo do problema é baseado em deslocamentos. Estendendo essa análise para os demais casos de carregamento, optou-se por omitir os resultados em termos de acelerações nos demais exemplos, visto que os resultados são espúrios para todos o métodos numéricos adotados por este trabalho e que os demais exemplos constituem casos onde o campo de acelerações é no máximo de mesma regularidade que o encontrado no exemplo 6.20.

Exemplo 6.21. *O carregamento externo é aplicado com valor igual a 1N no intervalo de 0 a 10^{-2} segundos, caracterizando uma força de impulso. Os gráficos de deslocamento e velocidade ao longo do tempo da extremidade livre são apresentados a seguir para diferentes estratégias de aproximação.*

A resposta transiente para a aproximação feita com MEF Linear, MEFG com 1 nível de enriquecimento e a adaptação do MEFGE à dinâmica é apresentada na figura 54.



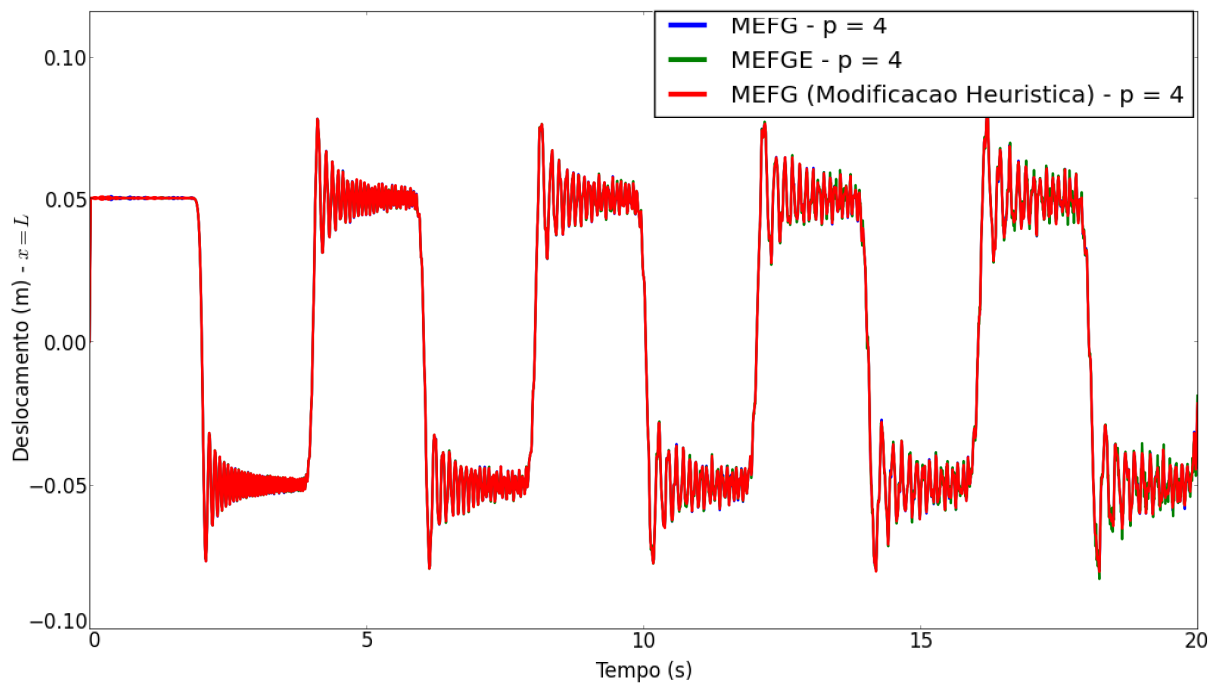
(a)



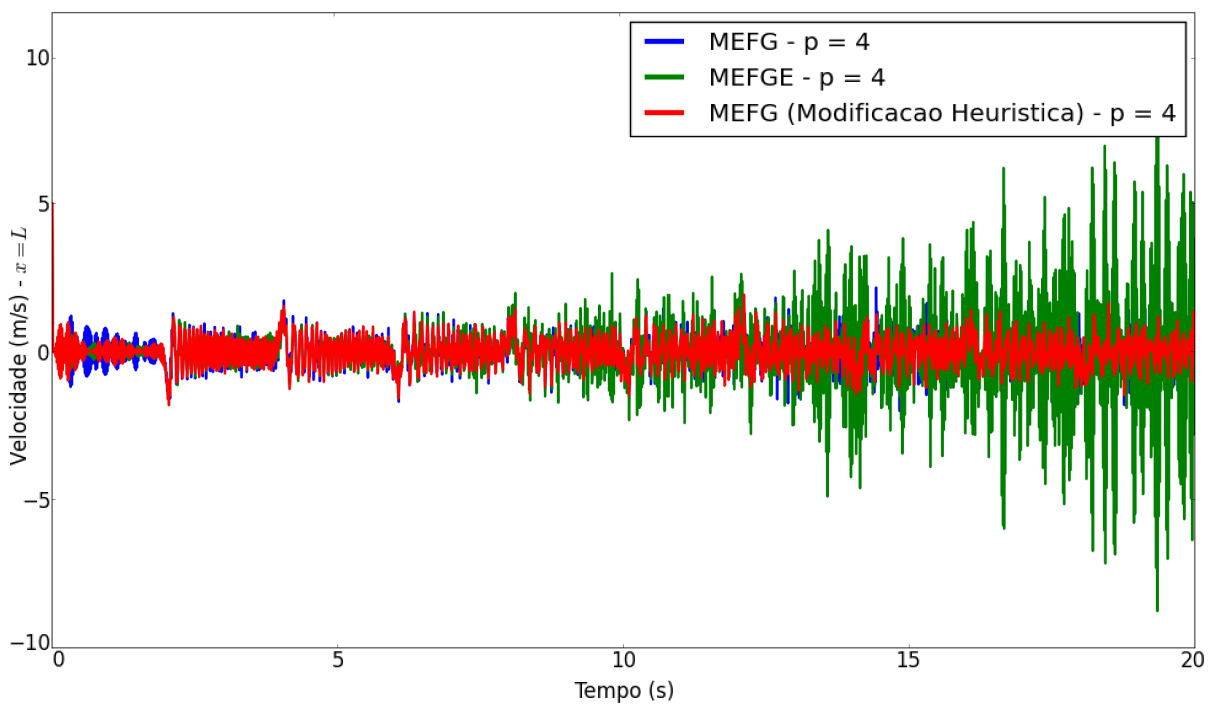
(b)

Figura 54- Análise transiente - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

O refino p é aplicado até 4 níveis de enriquecimento para as três abordagens: MEFG, MEFGE e Modificação Heurística. Os resultados são apresentados na figura 55.



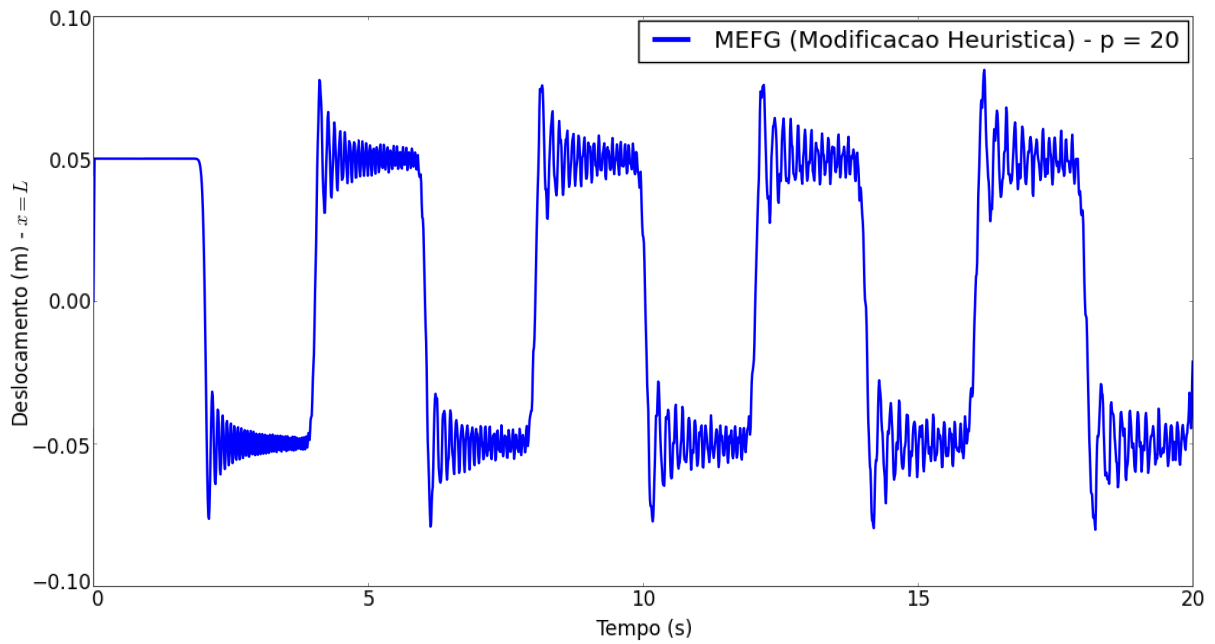
(a)



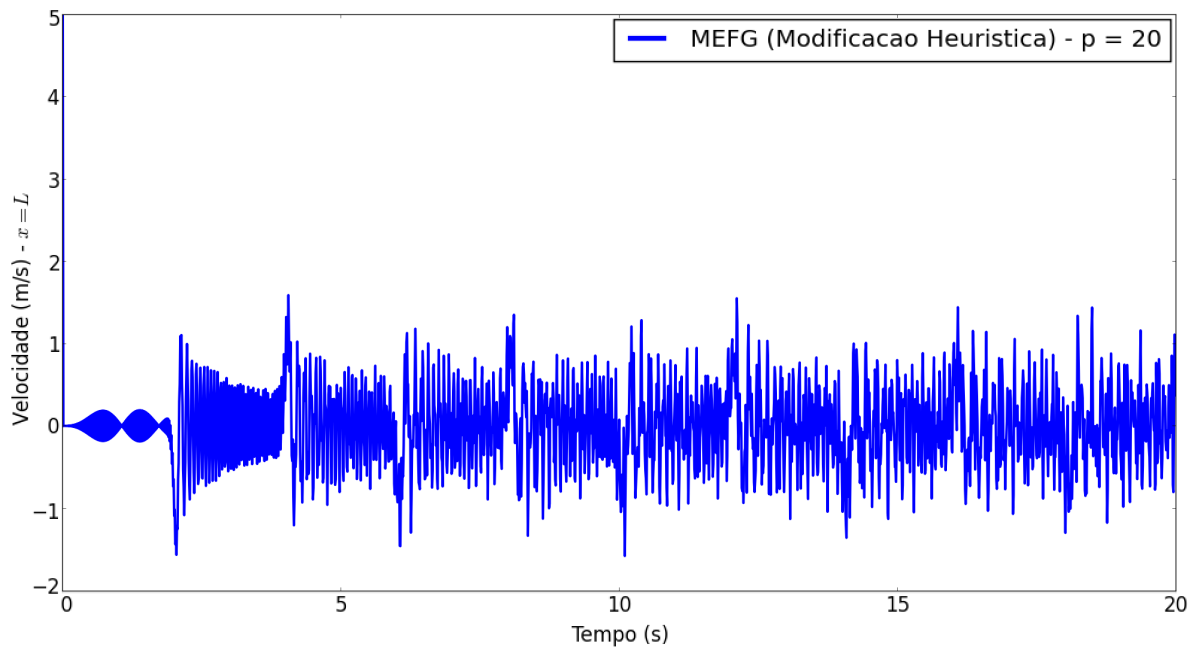
(b)

Figura 55- Análise transiente (refino p) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

Levando o refino p até alta ordem, visando destacar a estabilidade da proposta, tem-se os resultados apresentados na figura 56.



(a)



(b)

Figura 56- Análise transiente (refino p de alta ordem) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

O exemplo 6.21 apresentou o estudo da aplicação de um impulso unitário na extremidade da barra considerada. Primeiramente a aproximação foi feita pelo MEF Linear, pelo MEFG com 1 nível de enriquecimento e a estabilização correspondente do MEFGE. Como pode ser observado na figura 54, a resposta para deslocamento apresenta grande oscilação para o MEF Linear e um comportamento mais acurado para as alternativas enriquecidas. A res-

posta para velocidade, no entanto, apresenta grande perturbação para as três alternativas de aproximação.

Levando o refino p até 4 níveis de enriquecimento, a figura 55 apresenta a comparação entre o MEFG, MEFGE e Modificação Heurística. As aproximações correspondentes para deslocamentos são consideravelmente próximas e mais acuradas que o resultados anterior, sendo que a Modificação Heurística resultou em uma aproximação bastante acurada para os primeiros passos de tempo. No entanto, a resposta para velocidades apresenta comportamentos bastante distintos sendo que o MEFGE tem sua resposta deteriorada ao longo do tempo.

Testando a estabilidade da proposta de Modificação Heurística, a figura 56 mostra os resultados da aplicação de 20 níveis de enriquecimento. Aparentemente esse refino p de alta ordem não implicou em ganhos expressivos em acurácia, tanto para deslocamentos como para velocidades. Assim como no exemplo 6.20, é válido ressaltar que a aplicação de diversos níveis de enriquecimento não comprometeu a estabilidade numérica da aproximação, seguindo a tendência apresentada na análise modal.

Exemplo 6.22. A excitação externa é aplicada conforme a equação 147, configurando uma situação de descarregamento exponencial ao longo do tempo como pode ser observado na figura 57. Os gráficos de deslocamento e velocidade ao longo do tempo da extremidade livre são apresentados para diferentes estratégias de aproximação.

$$f(t) = 1,0 \times e^{-t} \quad (147)$$

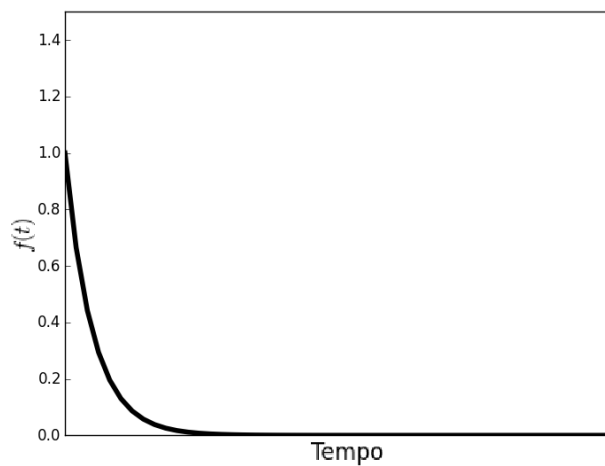
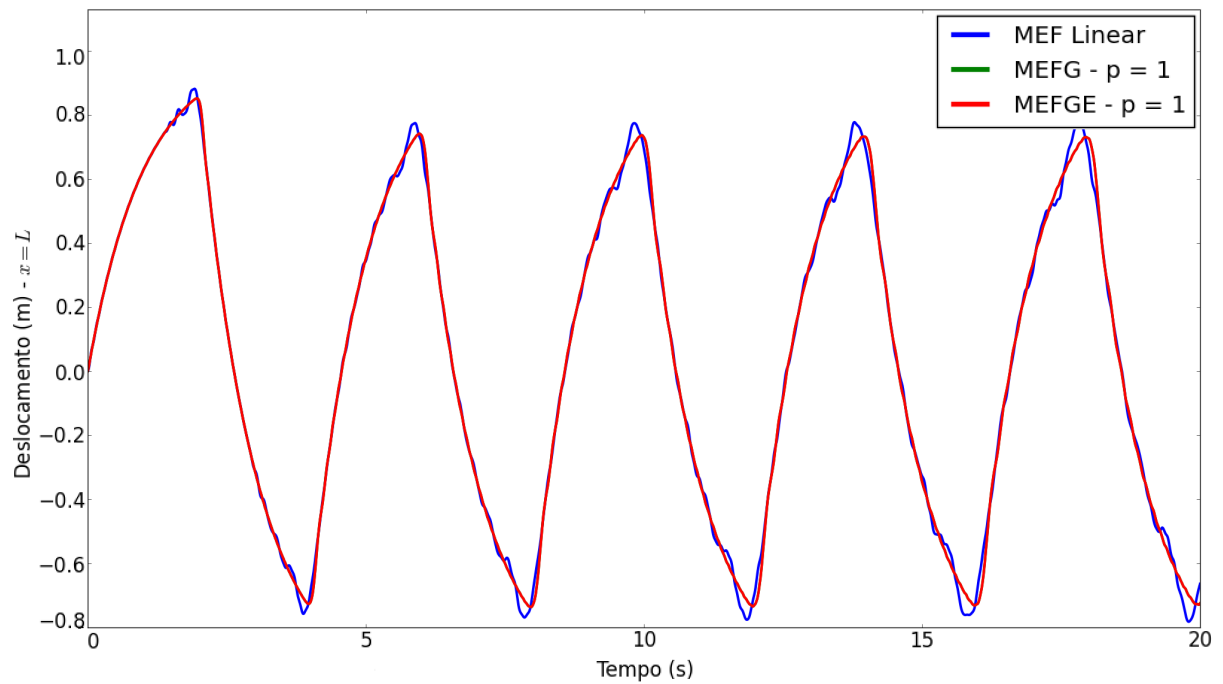
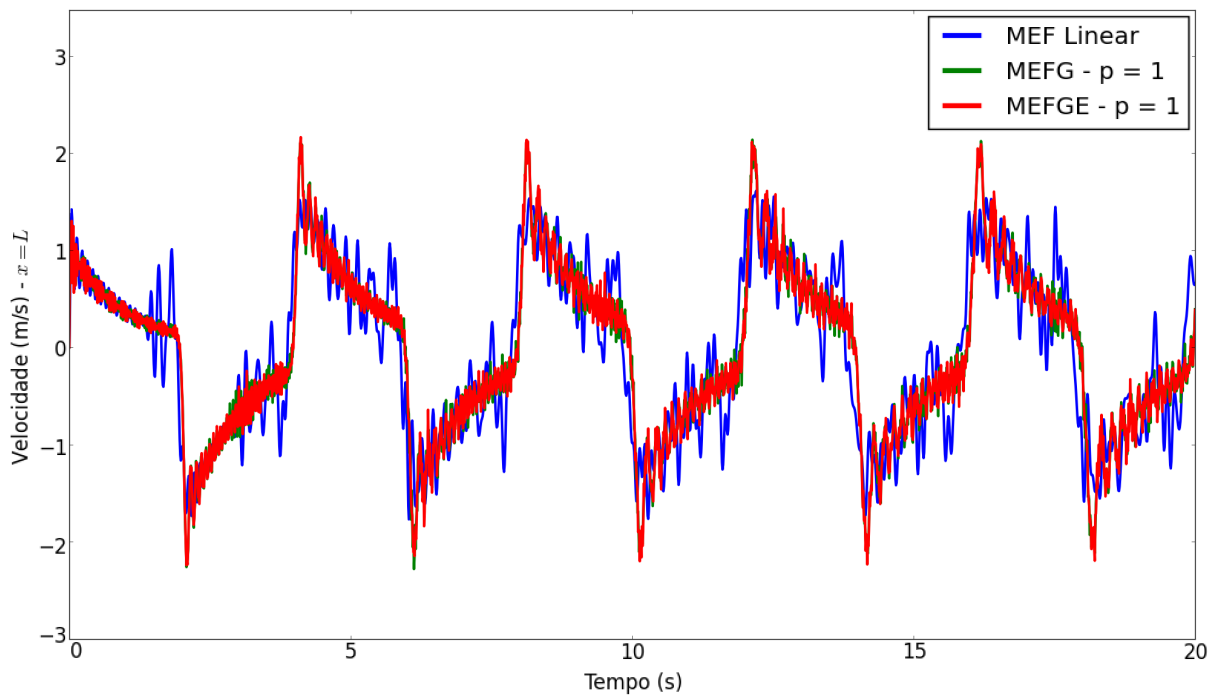


Figura 57- Descarregamento exponencial

A resposta transiente para a aproximação feita com MEF Linear, MEFG com 1 nível de enriquecimento e a adaptação do MEFGE à dinâmica é apresentada na figura 58.



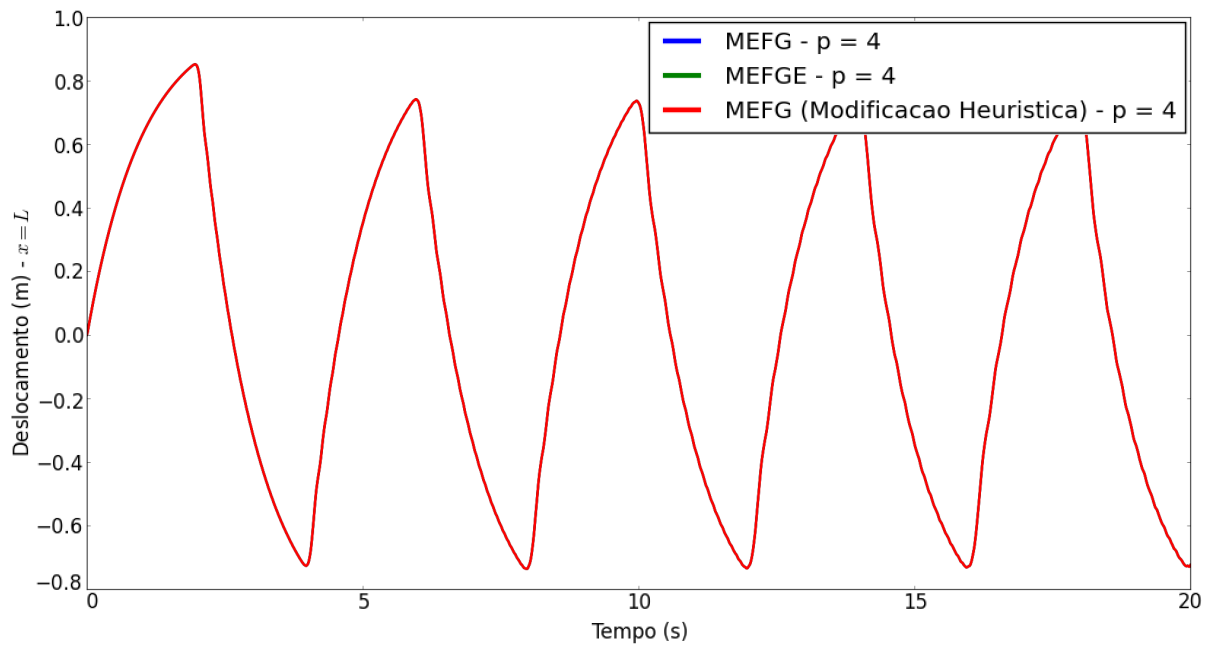
(a)



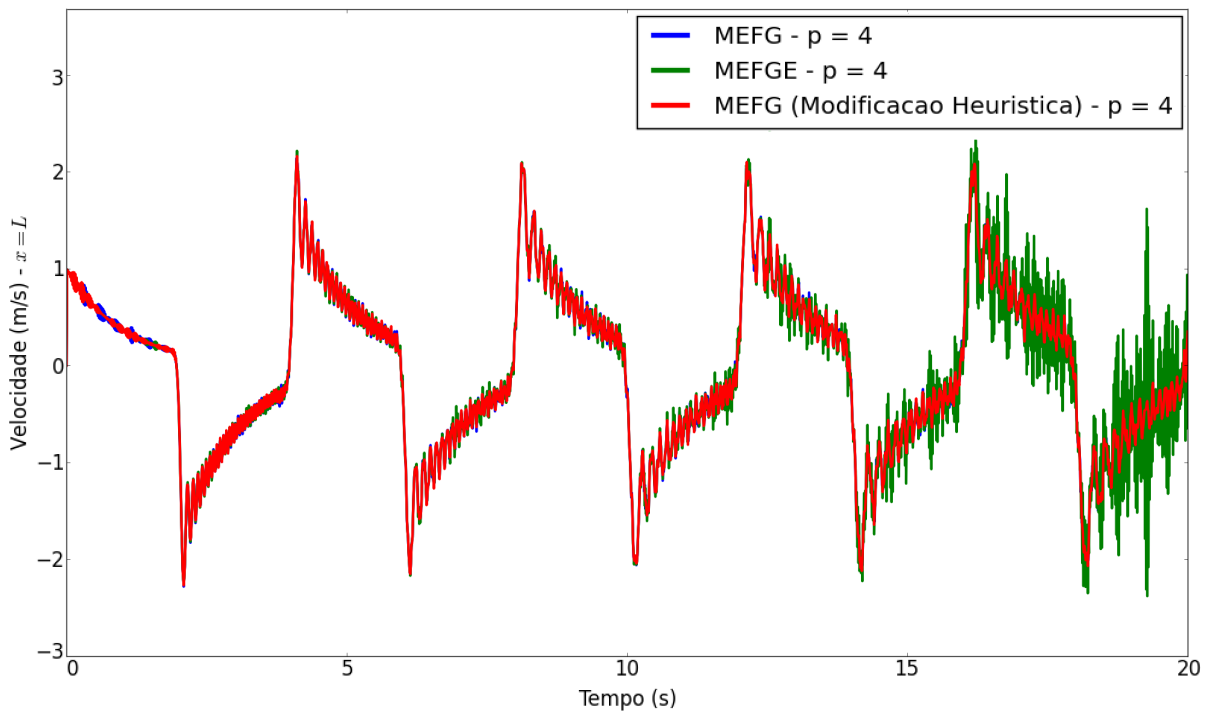
(b)

Figura 58- Análise transiente - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

O refino p é aplicado até 4 níveis de enriquecimento para as três abordagens: MEFG, MEFGE e Modificação Heurística. Os resultados são apresentados na figura 59.



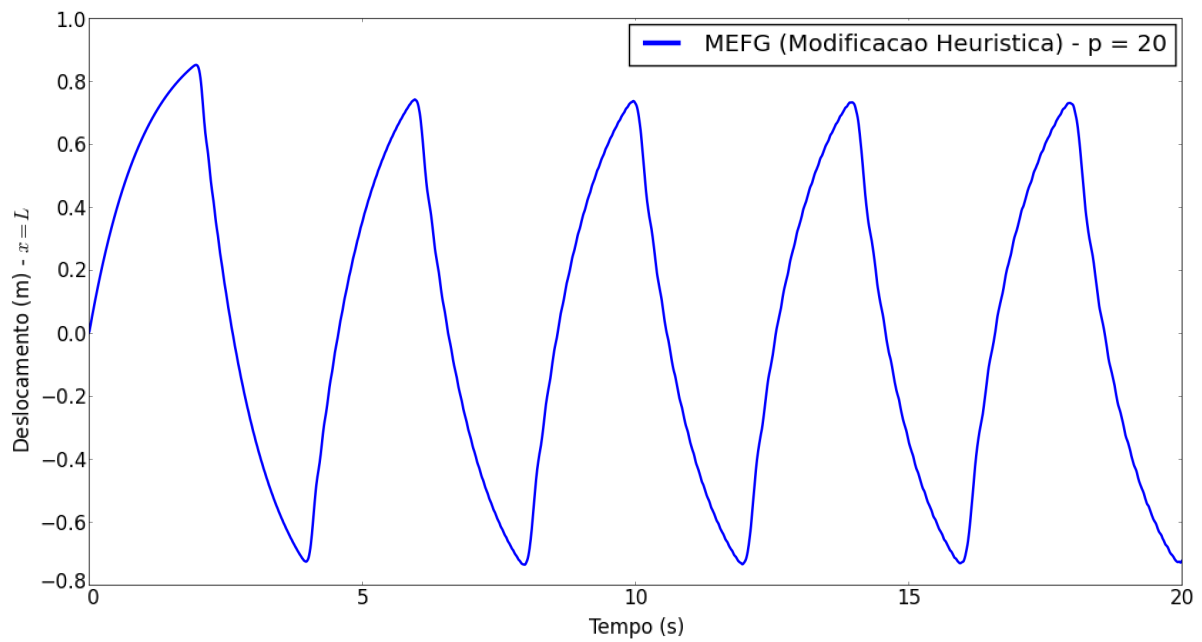
(a)



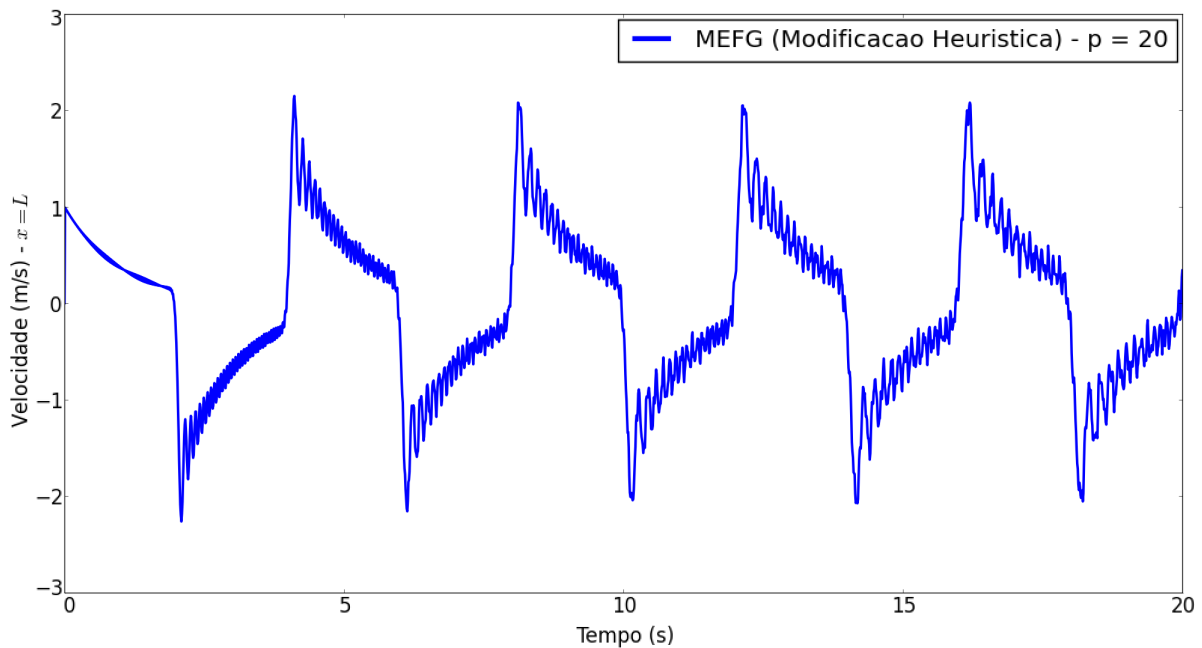
(b)

Figura 59- Análise transiente (refino p) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

Levando o refino p até alta ordem, visando destacar a estabilidade da proposta, tem-se os resultados apresentados na figura 60.



(a)



(b)

Figura 60- Análise transiente (refino p de alta ordem) - (a) Deslocamentos na extremidade livre, (b) Velocidades na extremidade livre.

O exemplo 6.22 apresentou o estudo da aplicação de um descarregamento na forma exponencial aplicado na extremidade da barra considerada. Primeiramente a aproximação foi feita pelo MEF Linear, pelo MEFG com 1 nível de enriquecimento e a estabilização correspondente do MEFGE. Como pode ser observado na figura 58, a resposta para deslocamentos

apresenta grande oscilação para o MEF Linear e um comportamento mais acurado para as alternativas enriquecidas. A resposta para velocidade segue a mesma tendência, com uma progressiva deterioração da resposta ao longo do tempo.

Levando o refino p até 4 níveis de enriquecimento, a figura 59 apresenta a comparação entre o MEFG, MEFGE e Modificação Heurística. As aproximações correspondentes para deslocamentos são consideravelmente próximas e mais acuradas que os resultados anteriores. No entanto, a resposta para velocidades apresenta comportamentos bastante distintos sendo que o MEFGE tem sua resposta deteriorada ao longo do tempo.

Testando a estabilidade da proposta de Modificação Heurística, a figura 60 mostra os resultados da aplicação de 20 níveis de enriquecimento. Aparentemente esse refino p de alta ordem não implicou em ganhos expressivos em acurácia, tanto para deslocamentos como para velocidades.

Os exemplos apresentados para análise transiente demonstram os aspectos de estabilidade das propostas apresentadas para a estabilização do MEFG em análise dinâmica 1D. Conforme apresentado, a análise transiente foi feita utilizando o método de Newmark com as matrizes completas geradas pela aplicação do MEFG. No entanto, uma vez que as propostas se mostraram estáveis, é possível tirar proveito da melhora do espectro de frequências, como apresentado na seção anterior, para a construção da análise transiente a partir do método de superposição modal, analogamente ao feito por Torii (2012). Dessa forma, seria possível reduzir o custo computacional, uma vez que o trecho com boa acurácia do espectro é melhorada com o refino p .

Por fim, é relevante ressaltar que, como Rozycki *et al.* (2008) observaram, realizar o refino com o processo de enriquecimento do MEFG possibilita melhorar a resposta sem alterar as malhas temporal ou geométrica e, conseqüentemente, sem alterar as condições de estabilidade de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

6.2 ANÁLISE BIDIMENSIONAL

Nesta seção são apresentados resultados relativos a aplicação do MEFG para problemas de membranas sujeitas apenas a deslocamentos planares. A implementação para o caso bidimensional foi feita em Maple devido a facilidade em se gerar as funções de forma bidimensionais a partir das funções unidimensionais além da facilidade proveniente da computação simbólica para o cálculo com grande precisão.

6.2.1 ANÁLISE MODAL

Os exemplos apresentados nessa seção visam demonstrar a aplicação do refino p do MEFG para o caso bidimensional. O refino p não foi apresentado por Torii (2012) pois, conforme explicado em seu trabalho, a formulação do enriquecimento trigonométrico clássico apresentava dificuldades de estabilidade numérica que também foram enfrentadas por Shang (2014).

A modificação heurística apresentada neste trabalho (seção 5.2) possibilitou a construção de funções de aproximação bidimensionais, seguindo o processo apresentado na seção 4.4, que permitem a aplicação de enriquecimentos sucessivos e, dessa forma, permitem o refino p bidimensional.

Exemplo 6.23. *Considere-se uma membrana quadrada ($L_x = L_y = 2$) com as quatro bordas engastadas (condições de Dirichlet nulas ou homogêneas). Considere-se ainda propriedades materiais unitárias de modo que $c = 1\text{m/s}$ e a aproximação feita pelo MEFG com apenas 1 elemento finito.*

A solução analítica para os autovalores deste problema é dada por:

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad \forall m, n = 1, 2, \dots \quad (148)$$

Utilizando as frequências calculadas pela equação 148 para normalizar as repostas aproximadas obtidas pelo MEFG com Modificação Heurística e $\beta_1 = \frac{3\pi}{4}$ e $p = 1, 2, 3$, tem-se os espectros de frequência normalizados apresentados na figura 61.

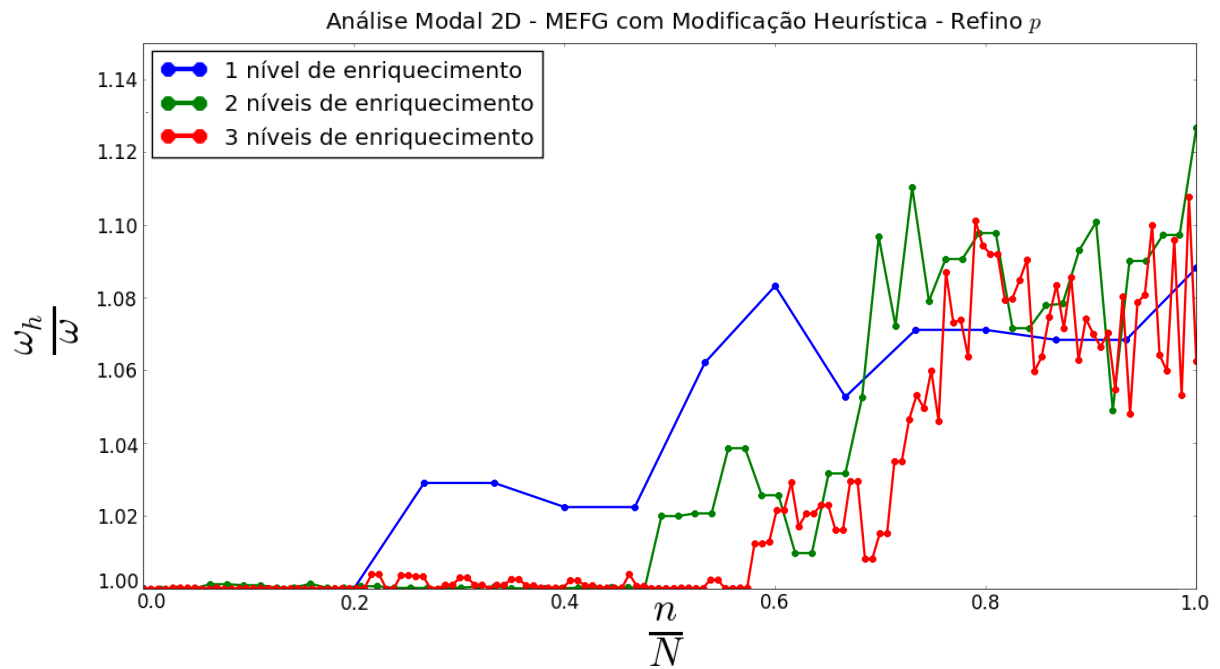


Figura 61- Espectro de Frequências - Modificação Heurística - 1, 2 e 3 níveis de enriquecimento.

A convergência do refino p para as três primeiras frequências distintas é apresentada na figura 62 e os valores calculados são expostos na tabela 5.

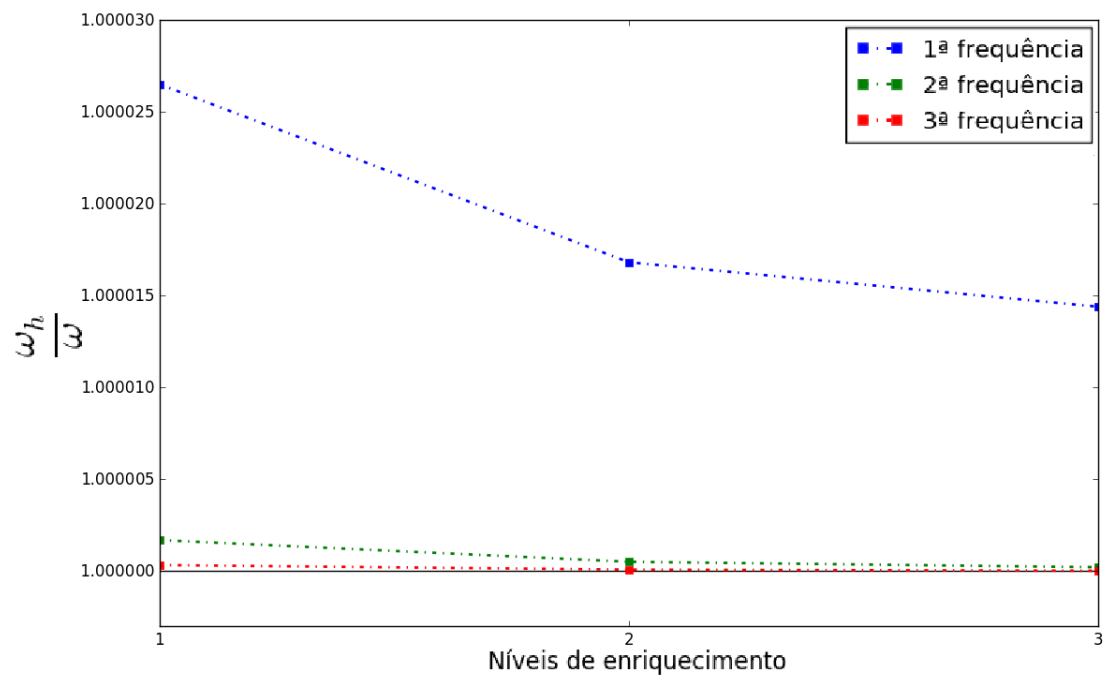


Figura 62- Convergência do refino p para as três primeiras frequências distintas - MEFG - Modificação Heurística Bidimensional.

Tabela 5- VALORES DE FREQUÊNCIA NO REFINO p REFERENTES ÀS TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DISTINTAS - MEFG - MODIFICAÇÃO HEURÍSTICA BIDIMENSIONAL

Freq.	Solução Analítica	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
1ª frequência	2.22144146908	2.22150035020	2.22144522490	2.22144220698
2ª frequência	3.51240736552	3.51246642542	3.51240915156	3.51240764973
3ª frequência	4.44288293816	4.44294687986	4.44288388422	4.44288301913

O exemplo 6.23 apresentou o refino p do MEFG com a Modificação Heurística para a análise modal de uma membrana. A figura 61 mostrou que há ganho de acurácia com a aplicação dos enriquecimentos sucessivos e que não houve problemas aparentes de instabilidade numérica.

Desvinculando a aproximação de qualquer efeito de refino de malha, ao utilizar apenas um elemento, foi possível notar o efeito na taxa de convergência do refino p , conforme apresentado na tabela 5 e na figura 62.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho discutiu aspectos relevantes à estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise dinâmica. Foram apresentados exemplos unidimensionais de barra e bidimensionais de membrana, contemplando análise modal e transiente. A formulação do enriquecimento trigonométrico foi baseada nas propostas de Arndt (2009) e Torii (2012).

Foi apresentado um estudo acerca de variações na escolha da partição da unidade para elementos unidimensionais e os respectivos impactos na aproximação do espectro de frequências. Foram estudados também os impactos de variações do parâmetro β presente nas funções de enriquecimento, analogamente ao feito por trabalhos anteriores, abrangendo as variações na regularidade das funções da partição da unidade. Foi discutida a relação entre regularidade no espaço de aproximação com a acurácia em termos do espectro de frequências.

Buscando tratar o problema de estabilidade, foram estudadas duas alternativas de estabilização. A primeira se baseou numa adaptação do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado, proposto inicialmente para problemas que recaem na resolução de sistema de equações por Babuška e Banerjee (2012). A segunda proposta consistiu na modificação do parâmetro β presente nas funções de enriquecimento trigonométrico do MEFGE proposto por Arndt (2009) e Torii (2012).

A primeira proposta de estabilização se mostrou relativamente efetiva para a redução do número de condição da matriz de rigidez do problema. Foram obtidos resultados um pouco melhores para as primeiras frequências aproximadas, comparativamente com o MEFGE. No entanto, a limitação de estabilidade para o refino p não foi contornada satisfatoriamente. É possível que a utilização do MEFGE à análise dinâmica necessite de uma adaptação mais profunda, utilizando a ideia central de quasi-ortogonalização do MEFGE original para construir uma proposta de estabilização voltada para a matriz de massa, ao invés da matriz de rigidez, uma vez a matriz de massa aparenta governar a estabilidade do problema.

Por sua vez, a segunda proposta de estabilização se mostrou consideravelmente efetiva na melhora da estabilidade. As limitações para o refino p com essa proposta foram praticamente eliminadas, sendo possível realizar refinamentos de alta ordem sem a obtenção de modo espúrios e

sem a necessidade de ajustes numéricos para garantir convergência. O ganho em estabilidade vem ao custo de uma pequena perda de acurácia para frequência mais baixa. No entanto, a resposta para o trecho final do espectro de frequências é melhor do que a proveniente do MEFG clássico. Com isso, é possível concluir que houve uma troca de um pouco de acurácia por considerável estabilidade numérica.

Para a análise transiente foi adotado o Método de Newmark com a utilização das matrizes de massa e rigidez assim como geradas pelo MEFG. Apesar dos resultados com perturbações inerentes do Método de Newmark, foi possível comparar as propostas de aproximação entre si, sendo que a segunda proposta de estabilização se destacou em grande parte dos exemplos. Foi apresentada a possibilidade de efetuar refinamentos de alta ordem com consequente melhora na resposta sem afetar as condições de estabilidade de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

A extensão da segunda proposta de estabilização para a análise bidimensional possibilitou a aplicação do refino p , contornando efetivamente o problema de estabilidade apontado para esta aplicação por Torii (2012). Nesse contexto, foi analisada a convergência da aproximação para as primeiras frequências nas aplicações de enriquecimentos sucessivos, destacando a melhora na acurácia. Dessa forma, particular atenção deve ser dada aos problemas envolvendo a equação da onda bidimensional, uma vez que o ganho de precisão para as frequências mais altas foi relevante.

Os resultados desse trabalho mostram que há formas de contornar problemas de instabilidade no MEFG aplicado à análise dinâmica, uma vez que propostas simples foram capazes de impactar positivamente as aproximações. Levou-se o refino p a ordens elevadas e foi possível construir uma aproximação bidimensional a partir das funções unidimensionais. Com isso, espera-se que novos estudos venham a discutir as questões de estabilidade do MEFG em análise dinâmica, elucidando a natureza dos problemas encontrados e possibilitando a construção de aproximações mais acuradas e estáveis.

Em função do exposto, entende-se que as próximas etapas de investigação sobre o assunto incluem:

- Estudar a influência do condicionamento da matriz de massa na acurácia da aproximação e no custo computacional envolvido para a resolução do problema;
- Desenvolver uma formulação do MEFGE direcionada para a estabilização da matriz de massa do sistema;
- Aplicar as propostas de estabilização para análise dinâmica não-linear;

- Elaborar uma estratégia de integração numérica utilizando as especificidades das aplicações visando diminuir o custo computacional e o erro numérico;
- Testar a estabilização em análise transiente em conjunto com a aplicação do Método HHT;
- Utilizar o Método da Superposição Modal para realizar a análise transiente apenas com os modos aproximados com maior acurácia;
- Estender as propostas de estabilização apresentadas para o MEFG-Adaptativo;
- Estudar problemas transientes com amortecimento.

REFERÊNCIAS

- ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. **Sobolev Spaces**. New York: Academic press, 2003.
- AN, X. M. *et al.* Prediction of rank deficiency in partition of unity-based methods with plane triangular or quadrilateral meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, n. 5-8, p. 665–674, 2011.
- AN, X. M. *et al.* Investigation of linear dependence problem of three-dimensional partition of unity-based finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 233-236, p. 137–151, 2012.
- ARAGÓN, A. M.; DUARTE, C. A.; GAUBELLE, P. H. Generalized finite element enrichment functions for discontinuous gradient fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 82, p. 242–268, 2010.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Compostos Aplicado à Análise de Vibrações**. 135 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2001.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 6, p. 659–672, 2010.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; HECKE, M. B. The composite element method applied to free vibration analysis of trusses and beams. **Applied numerical mathematics**, v. 47, n. 2, p. 59–73, 2003.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201-204, p. 91–111, 2012.
- BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, n. 4, p. 945–981, 1994.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.
- BABUŠKA, I. M.; SAUTER, S. A. Is the pollution effect of the fem avoidable for the helmholtz equation considering high wave numbers? **SIAM review**, v. 42, n. 3, p. 451–484, 2000.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.

BÉCHET, E. *et al.* Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, n. 8, p. 1033–1056, 2005.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: A Second Course**. New Jersey: Prentice-Hall, 1983.

BEL, E. D.; VILLON, P.; BOUILLARD, P. Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 9, p. 1105–1126, 2005.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 5, p. 601–620, 1999.

BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 17, n. 4, p. 1–25, 2009.

BENZLEY, S. Representation of singularities with isoparametric finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, n. 3, p. 537–545, 1974.

BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods**. New York: [s.n.], 2000. 420 p. ISBN 9780387759333.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: [s.n.], 2011. 614 p. ISBN 9780387709130.

BYSKOV, E. The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 6, n. 2, p. 159–167, 1970.

CARVALHO, N. F. d. **O método composto aplicado à análise de vibrações livres de placas espessas**. 128 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2002.

CHOI, Y. J.; HULSEN, M. a.; MEIJER, H. E. H. Simulation of the flow of a viscoelastic fluid around a stationary cylinder using an extended finite element method. **Computers and Fluids**, v. 57, p. 183–194, 2012.

COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of mathematical physics**. Cambridge: Wiley, 1962. 830 p.

CRAIG, R. R. **Structural dynamics: an introduction to computer methods**. Bethel: John Wiley, 1981.

DAUX, C. *et al.* Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. September 1999, p. 1741–1760, 2000.

DERAEMAERKER, A.; BABUŠKA, I.; BOUILLARD, P. Dispersion and pollution of the fem solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 4, p. 471–499, 1999.

DOLBOW, J.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Modeling fracture in mindlin–reissner plates with the extended finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 48, p. 7161–7183, 2000.

DOLBOW, J. E. **An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics**. Tese (Doutorado) — Northwestern university, 1999.

DUARTE, C. a.; KIM, D. J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 6-8, p. 487–504, 2008.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, n. 1, p. 237–262, 1996a.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. Hp clouds-an hp meshless method. **Numerical methods for partial differential equations**, v. 12, n. 6, p. 673–706, 1996b.

ELGUEDJ, T.; GRAVOUIL, a.; MAIGRE, H. An explicit dynamics extended finite element method. Part 1: Mass lumping for arbitrary enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 30-32, p. 2297–2317, 2009.

ENGELS, R. Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 114, n. 1, p. 3–9, 1992.

ENR, A.; GUERMOND, J.-L. **Theory and Practice of Finite Elements**. New York: Springer Science+Business Media, 2004. 530 p.

ESSER, P.; GRANDE, J.; REUSKEN, A. An extended finite element method applied to levitated droplet problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, n. 7, p. 757–773, 2010.

FADDEEV, D.; FADDEEVA, V. Computational methods of linear algebra. **Journal of Soviet Mathematics**, Springer, v. 15, n. 5, p. 531–650, 1981.

FELDMAN, J.; FEIGENBAUM, E. A. **Computers and Thought**. New York: McGraw-Hill, 1963.

FIX, G.; GULATI, S.; WAKOFF, G. On the use of singular functions with finite element approximations. **Journal of Computational Physics**, v. 13, n. 2, p. 209–228, 1973.

FREITAS, A. **Modelos numéricos baseados em MEFG-Ck e MEFGgl aplicados a problemas de elasticidade e plasticidade bidimensional**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

GANESAN, N.; ENGELS, R. Hierarchical bernoulli-euler beam finite elements. **Computers & Structures**, v. 43, n. 2, p. 297–304, 1992.

GARCIA, O. A.; ROSSI, R.; LINZMAIER, P. R. Método de elementos finitos generalizados com alta regularidade na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidas. **VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2010, Campina Grande PA**, 2010.

GOTTLIEB, D.; ORSZAG, S. A. **Numerical analysis of spectral methods: theory and applications**. Philadelphia: SIAM, 1977.

GRAVOUIL, A.; ELGUEDJ, T.; MAIGRE, H. An explicit dynamics extended finite element method. Part 2: Element-by-element stable-explicit/explicit dynamic scheme. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 30-32, p. 2318–2328, 2009.

GRIEBEL, M.; SCHWEITZER, M. A particle-partition of unity method part VII: adaptivity. **Lecture Notes in Computational Science and Engineering**, Springer, v. 57, p. 121–147, 2007.

GUDDATI, M. N.; YUE, B. Modified integration rules for reducing dispersion error in finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 3, p. 275–287, 2004.

GUPTA, V. *et al.* Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 355–386, 2015.

GUPTA, V. *et al.* A stable and optimally convergent generalized fem (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 266, p. 23–39, 2013.

HAM, S.; BATHE, K. J. A finite element method enriched for wave propagation problems. **Computers and Structures**, v. 94-95, p. 1–12, 2012.

HARARI, I. A survey of finite element methods for time-harmonic acoustics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 13, p. 1594–1607, 2006.

HAZARD, L.; BOUILLARD, P. Structural dynamics of viscoelastic sandwich plates by the partition of unity finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 41-44, p. 4101–4116, 2007.

HOEFEL, S. d. S. **Método dos Elementos Compostos aplicados à análise de vibrações de viga de timoshenko**. 141 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2002.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis**. 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2000. 826 p.

IHLENBURG, F.; BABUŠKA, I. Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part i: The h-version of the fem. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 30, n. 9, p. 9–37, 1995.

IHLENBURG, F.; BABUŠKA, I. Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part ii: the hp version of the fem. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 34, n. 1, p. 315–358, 1997.

JONES, E.; OLIPHANT, T.; PETERSON, P. {SciPy}: Open source scientific tools for {Python}. 2014.

KACIMI, A. E.; LAGHROUCHE, O. Improvement of PUFEM for the numerical solution of high-frequency elastic wave scattering on unstructured triangular mesh grids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, n. 3, p. 330–350, 2010.

KIM, D.-J.; HONG, S.-G.; DUARTE, C. A. Generalized finite element analysis using the pre-conditioned conjugate gradient method. **Applied Mathematical Modelling**, n. October 2013, 2015.

KOHNO, H.; BATHE, K. J.; WRIGHT, J. C. A finite element procedure for multiscale wave equations with application to plasma waves. **Computers & Structures**, v. 88, n. 1, p. 87–94, 2010.

KOMATITSCH, D.; VILOTTE, J.-P. The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. **Bulletin of the seismological society of America**, v. 88, n. 2, p. 368–392, 1998.

KRUBUSLY, C. S. **Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces**. New York: Springer Science+Business Media, 2012. 203 p. ISBN 978-0-8176-8237-6.

LANGTANGEN, H. P. **Computational Partial Differential Equations: Numerical Methods and Diffpack Programming**. New York: Springer Science & Business Media, 2003.

LEE, R.; CANGELLARIS, A. C. A study of discretization error in the finite element approximation of wave solutions. **Antennas and Propagation, IEEE Transactions on**, v. 40, n. 5, p. 542–549, 1992.

LEISSA, A. W.; QATU, M. S. **Vibration of continuous systems**. New York: McGraw Hill Professional, 2011.

LEUNG, A.; CHAN, J. Fourier p-element for the analysis of beams and plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 212, n. 1, p. 179–185, 1998.

LI, H. A note on the conditioning of a class of generalized finite element methods. **Applied Numerical Mathematics**, v. 62, n. 6, p. 754–766, 2012.

LI, H. **Investigation of stability and accuracy of high order generalized finite element methods**. Dissertação (Mestrado) — University of Illinois at Urbana-Champaign, 2014.

LIEBOWITZ, H.; MOYER, E. Finite element methods in fracture mechanics. **Computer and Structures**, v. 31, n. 1, 1989.

LIONS, J.; MAGENES, E. **Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications**. New York: Springer Science & Business Media, 1973. ISBN 9783642651632.

LOEHNERT, S. A stabilization technique for the regularization of nearly singular extended finite elements. **Computational Mechanics**, v. 54, n. 2, p. 523–533, 2014.

LU, C.; SHANKER, B. Generalized finite element method for vector electromagnetic problems. **Antennas and Propagation, IEEE Transactions on**, v. 55, n. 5, p. 1369–1381, 2007.

MALË, J.; ZIEMER, W. P. **Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1997.

MAPLESOFT, A. **Maple**. Waterloo: Maplesoft, A, 2004.

MELENK, J. M. **On generalized finite element methods**. Tese (Doutorado) — The University of Maryland, 1995.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.

- MENK, A.; BORDAS, S. P. A. A robust preconditioning technique for the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 85, n. October 2010, p. 1609–1632, 2011.
- MOËS, N. *et al.* A computational approach to handle complex microstructure geometries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 28-30, p. 3163–3177, 2003.
- MÖES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, v. 46, n. 1, p. 131–150, 1999.
- MONTEIRO, C. d. S. G. **Novos operadores de captura via o método dos elementos finitos aplicado a problemas de propagação de ondas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- MOURA, C. A. de; KUBRUSLY, C. S. **The Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) Condition: 80 Years After Its Discovery**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- ODEN, J.; DEMKOWICZ, L. F. **Applied Functional Analysis**. New York: Chapman & Hall, 2010. 589 p.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. Clouds, cracks and fem's. **Recent developments in computational and applied mechanics**, p. 302–321, 1997.
- ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**. New York: [s.n.], 1976. 448 p.
- O'HARA, P.; DUARTE, C.; EASON, T. Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 21, p. 1857–1871, 2009.
- OSTACHOWICZ, W. *et al.* Spectral finite element method. **Guided Waves in Structures for SHM: The Time-Domain Spectral Element Method**, p. 47–92, 2012.
- PALADIM, D. *et al.* Stable extended finite element method: Convergence, accuracy, properties and diffpack implementation. In: **International Conference on Extended Finite Element Methods-XFEM 2013**. [S.l.: s.n.], 2013.
- PETROLI, T. *et al.* Condicionamento do problema de autovalores obtido da aplicação do método dos elementos finitos generalizados na dinâmica das estruturas. **CILAMCE 2015 Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2015.
- RAYLEIGH, J. W. S. **The Theory of Sound (reprinted)**. New York: New York: Macmillan, 1945. 1052 p. ISBN 978-1-107-05799-1.
- RIESZ, F. Über Lineare Funktionalgleichungen. **Acta Mathematica**, v. 41, p. 71–98, 1916.
- ROZYCKI, P. *et al.* X-FEM explicit dynamics for constant strain elements to alleviate mesh constraints on internal or external boundaries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 5, p. 349–363, 2008.
- SAUERLAND, H.; FRIES, T.-P. The stable xfem for two-phase flows. **Computers & Fluids**, v. 87, p. 41–49, 2013.

SCHAEFER, H. On the fredholm alternative in locally convex linear spaces. **Studia Mathematica**, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 18, n. 3, p. 229–245, 1959.

SCHWEITZER, M. A. **A Parallel Multilevel Partition of Unity Method for Elliptic Partial Differential Equations**. [S.l.: s.n.], 2003. 196 p. ISBN 9783642142062.

SHANG, Y. H. **Análise dinâmica elastoplástica de problemas da mecânica de sólidos via métodos enriquecidos de elementos finitos**. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2014.

SIAVELIS, M. *et al.* Large sliding contact along branched discontinuities with X-FEM. **Computational Mechanics**, v. 52, n. 1, p. 201–219, 2013.

SILLEM, A.; SIMONE, A.; SLUYS, L. The Orthonormalized Generalized Finite Element Method: OGFEM: Efficient and stable reduction of approximation errors through multiple orthonormalized enriched basis functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 287, p. 112–149, 2015.

SIMONE, A.; DUARTE, C.; GIESSEN, E. Van der. A generalized finite element method for polycrystals with discontinuous grain boundaries. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 67, n. 8, p. 1122–1145, 2006.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 43–69, 2000b.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, n. May 1999, p. 1–16, 2000a.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32-33, p. 4081–4193, 2001.

SUKUMAR, N. *et al.* Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 11, p. 1549–1570, 2000.

SZABO, B.; MEHTA, A. p-convergent finite element approximations in fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, n. 3, p. 551–560, 1978.

SZABO, B. A.; BABUŠKA, I. **Finite element analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

TIAN, R. Extra-dof-free and linearly independent enrichments in GFEM. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 266, p. 1–22, 2013.

TIAN, R.; YAGAWA, G.; TERASAKA, H. Linear dependence problems of partition of unity-based generalized FEMs. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 37-40, p. 4768–4782, 2006.

TORII, A. J. **Análise dinâmica de estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2012.

- TORII, A. J.; MACHADO, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, n. 3, p. 1–31, 2012.
- TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. GFEM for modal analysis of 2D wave equation. **Engineering Computations**, v. 32, n. 6, p. 1779–1801, 2015.
- TURNER, M. J. *et al.* Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)**, v. 23, n. 9, 1956.
- WEAVER, W. J.; LOH, C. L. Dynamics of trusses by component-mode method. **Journal of Structural Engineering**, v. 111, n. 12, p. 2565–2575, 1985.
- WEINHARDT, P. d. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. O Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a análise dinâmica: tipos de enriquecimento, escolha da partição da unidade e técnicas de pré condicionamento. **CILAMCE 2015 Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2015.
- WEINHARDT, P. O. *et al.* Aplicação do método dos elementos finitos, análise isogeométrica e métodos enriquecidos à análise dinâmica 1d. **Proceedings of CMN2015**, v. 1, n. 1, 2015.
- WILLIAMSON, C. F. J. **A History of the Finite Element Method to the Middle 1960's**. Tese (Doutorado) — Boston University, 1976.
- WU, J.-Y.; LI, F.-B. An improved stable XFEM (Is-XFEM) with a novel enrichment function for the computational modeling of cohesive cracks. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 295, p. 77–107, 2015.
- YAZID, A.; ABDELKADER, N.; ABDELMADJID, H. A state-of-the-art review of the x-fem for computational fracture mechanics. **Applied Mathematical Modelling**, v. 33, n. 12, p. 4269–4282, 2009.
- YOSIDA, K. An operator-theoretical integration of the wave equation. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 8, n. 1, p. 79–92, 1955.
- ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structure, part ii: C 1 element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 659–696, 1998.
- ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Higher order stable generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, v. 128, n. 1, p. 1–29, 2014.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. London: McGraw-hill London, 1977.

APÊNDICE A – 2D - MEMBRANA

Analogamente ao exposto na primeira seção do Capítulo 3 para o caso unidimensional, o presente apêndice apresenta o desenvolvimento referente ao problema bidimensional.

Considere-se a membrana da figura 63 esticada ao longo de um contorno Γ arbitrário, sujeita a uma tensão normal σ_n que pode mudar ao longo do contorno. Adicionalmente, é possível levar em consideração uma tensão de cisalhamento desconhecida no plano xy (τ_{xy}).

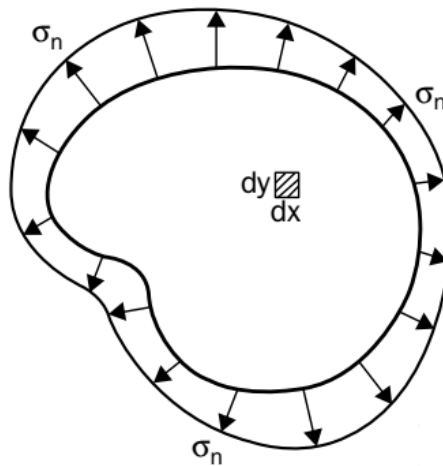


Figura 63- Membrana com contorno arbitrário.
FONTE: Adaptado de Leissa e Qatu (2011)

Analisando um elemento infinitesimal $dx \times dy$ no plano da membrana, como mostrado na figura 63, tem-se o diagrama de corpo livre exposto na figura 64. h é a espessura da membrana e q corresponde a uma pressão distribuída exercida sobre a membrana.

Os esforços resultantes normais T_x e T_y , representados na figura 64, se relacionam com as tensões através das relações $T_x = \sigma_x h$ e $T_y = \sigma_y h$. Já os esforços resultantes cisalhantes: T_{xy} e T_{yx} , representados na figura 64, se relacionam com as tensões cisalhantes através das relações $T_{xy} = \tau_{xy} h$ e $T_{yx} = \tau_{yx} h$.

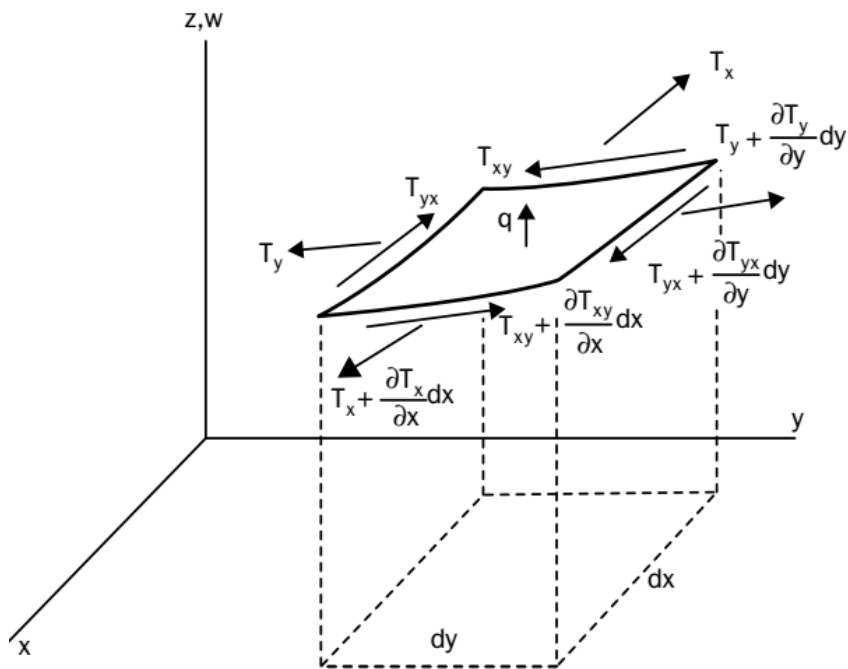


Figura 64- Diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal.

FONTE: Adaptado de Leissa e Qatu (2011)

As inclinações correspondentes ao elemento infinitesimal são detalhadas na figura 65.

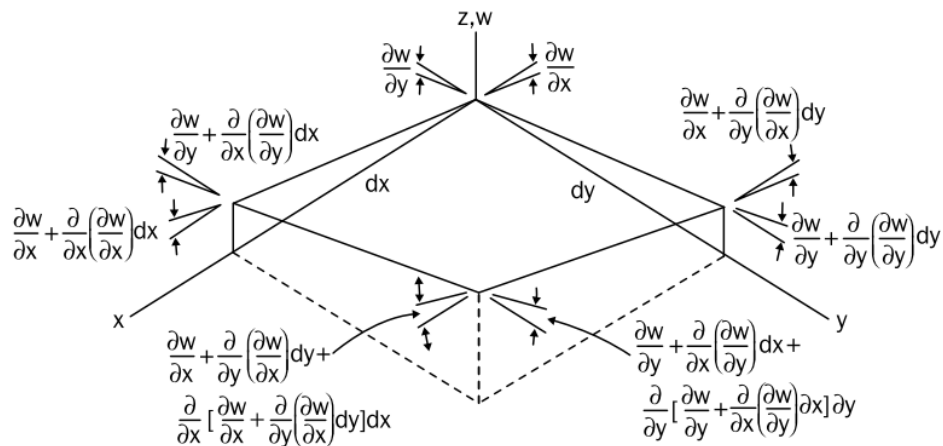


Figura 65- Inclinações do elemento infinitesimal.

FONTE: Adaptado de Leissa e Qatu (2011)

Dessa forma, considerando que as inclinações em todos os pontos e direções são pequenas durante o movimento de vibração e considerando massa específica ρ , o somatório de forças transversais pode ser escrito como:

$$E_x = -T_x \frac{\partial w}{\partial x} dy + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) dy \quad (149)$$

$$E_y = -T_y \frac{\partial w}{\partial y} dx + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) dx \quad (150)$$

$$E_{xy} = -T_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx \right) dy \quad (151)$$

$$E_{yx} = -T_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \left(T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dy \right) dx \quad (152)$$

$$E_q = +q dx dy \quad (153)$$

$$E_x + E_y + E_{xy} + E_{yx} + E_q = (\rho h dx dy) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (154)$$

Expandindo as expressões 149, 150, 151 e 152, eliminando os termos de ordem superior e dividindo por $dx dy$, é possível reescrever a equação 154 como:

$$\begin{aligned} & \left(T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & \left(T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(T_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (155)$$

O somatório de momentos em torno do eixo vertical implica em $T_{xy} = T_{yx}$. O somatório de forças nas direções x e y resulta nas equações clássicas da elasticidade plana:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (156)$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0 \quad (157)$$

Subtraindo-se da equação 154, $\frac{\partial w}{\partial x}$ vezes a equação 156 e $\frac{\partial w}{\partial y}$ vezes a equação 157, obtêm-se:

$$T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (158)$$

No caso geral, as componentes de tensão podem ser função de x e y . Da mesma forma, ρ e h podem também ser função de x e y para os casos de material não-homogêneo e variação de espessura da membrana. Particularizando para o caso homogêneo (ρ constante), na ausência de esforços planares cisalhantes ($T_{xy} = 0$) e tensões iguais nas direções x e y ($T_x = T_y = T$), a

equação diferencial 158 assume a seguinte forma:

$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (159)$$

Para o caso de vibração livre não-amortecida, tem-se $q = 0$ e portanto:

$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (160)$$

Com uma transformação de variáveis ou com uma escolha apropriada de unidades, tal que $\frac{\rho h}{T} = 1$, as equações 159 e 160 podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q \quad (161)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (162)$$

Por fim, utilizando a notação de operadores Laplaciano ($\Delta = \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$) e d'Alembertiano ($\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$), as equações 161 e 162 podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = q \quad \longrightarrow \quad \square w = q \quad (163)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0 \quad \longrightarrow \quad \square w = 0 \quad (164)$$